L'ÉVOLUTION DÉMOGRAPHIQUE

Dans ce thème, il s'agit de donner des modèles mathématiques permettant d'étudier l'évolution d'une population.
Les économistes proposent de nombreux modèles d'évolution des populations avec des outils mathématiques de plus en plus performants.

I Quelques rappels

Définition n°1. ***Variation absolue, variation relative***

Si une quantité évolue d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f, on définit :

la **variation absolue** de cette quantité par : $V_f - V_i$	la **variation relative** de cette quantité par : $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$

Exemple n°1.

Si la population d'un pays évolue de 2 millions à 2,2 millions alors

la variation absolue est : $2{,}2 - 2 = 0{,}2$ millions	et la variation relative est : $\dfrac{2{,}2-2}{2} = 0{,}1$

Remarque n°1.

La variation absolue a la même unité que la quantité étudiée alors que la variation relative est sans unité.

Propriété n°1.

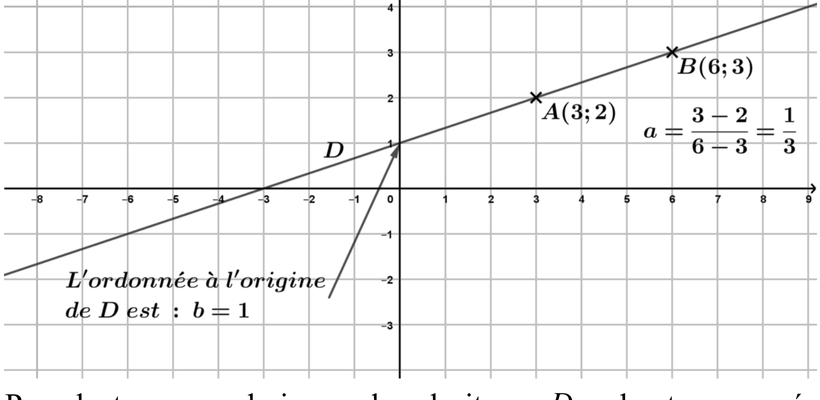
Dans un repère du plan, une droite *D* qui n'est pas parallèle à l'axe de ordonnées a une équation de la forme $y = ax+b$.
On dit alors que le nombre *a* **est le coefficient directeur** de *D* et que le nombre ***b* est l'ordonnée à l'origine** de *D*.

Méthode n°1. ***Déterminer l'équation réduite***

Soit D une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
▪ L'ordonnée à l'origine de D est l'ordonnée du point d'intersection de *D* avec l'axe des ordonnées.
▪ Soit *A* et *B* deux points distincts de *D*. Alors, le coefficient directeur de *D* est : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple n°2.

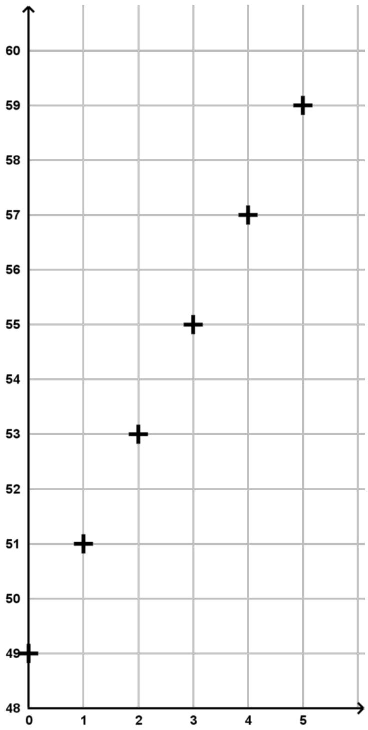
On considère la droite *D* représentée ci -dessous.



Par lecture graphuique, la droite *D* admet pour équation réduite $y = \dfrac{1}{3}x+1$

II Modèle linéaire

Exemple n°3.



On considère l' évolution d'une population d'une ville sur plusieurs années. Les valeurs données sont exprimées en milliers et arrondies à l'unité.
On considère 2015 comme l'année 0 et on note $u(n)$ la population à l'année n .

Ainsi, $u(0)=49$, $u(1)=51$, $u(2)=53$, $u(3)=55$, $u(4)=57$ et $u(5)=59$.

Si on calcule les variations absolues d'une année sur l'autre, on trouve :
$u(1)-u(0) = 2$; $u(2)-u(1) = 2$ $u(3)-u(2) = 2$; $u(4)-u(3) = 2$; $u(5)-u(4) = 2$.
Ainsi, on constate que les variations absolue s sont constantes égales à 2.

Si on représente dans un repère les points de coordonnées $(n\ ;u(n))$, on obtient le nuage de points ci-contre ; on constate que ces points sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est 2 et dont l'ordonnée à l'origine est 49. Ainsi, l'équation réduite de cette droite est $y = 2x+49$.
Si la population continue à évoluer de la même façon, on peut estimer qu'en 2030, la ville aura une population de $2\times15+49=79$ milliers d'habitants (car $2030-2015=15$ donc 2030 correspond à l'année $n = 15$).

Définition n°2. ***Suite arithmétique***

On dit qu'une quantité u dépendant d'un entier naturel n a une **variation linéaire** si sa variation absolue $u(n+1)-u(n)$ a une valeur constante r (c'est -à-dire une valeur r qui ne dépend pas de n).
La suite des valeurs $u(n)$ est alors appelée :
une **suite arithmétique** de raison r .

Propriété n°2.

Si une suite de valeurs $u(n)$ est une suite arithmétique de raison r alors
▪ les points de coordonnées $(n\,;u(n))$ sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est r ;
▪ Pour tout entier naturel n , $\boxed{u(n) = u(0)+nr}$

Remarque n°2.

En fait, dans la réalité, les variations absolues ne sont jamais constantes. On considère cependant que le modèle linéaire est adapté si les variations absolues varient peu.

Cela se traduira par le fait que les points de coordonnées $(n\ ;u(n))$ ne sont pas parfaitement alignés mais approximativement alignés.

Dans ce cas, on peut rechercher une droite qui représenterait au mieux cet alignement approximatif.

Cette droite est appelée **la droite d'ajustement linéaire** du nuage de points.

Connaissance n°1 ***Déterminer la droite d'ajustement linéaire à la calculatrice***

▪ Avec une CASIO
▪ Avec une TI-83
▪ Avec une NUMWORKS

III Modèle exponentiel

Le modèle linéaire ne s'applique qu'à des populations dont l'évolution absolue est relativement constante. Certaines populations ont une évolution beaucoup plus rapide.
C'est le cas, par exemple, de la population mondiale.
Le tableau suivant rassemble des estimations de celle-ci en milliard d'habitants

année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
population	2,54	2,77	3,03	3,34	3,7	4,08	4,46	4,87	5,33

(Source : https ://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/)

Si on ca lcule les variations absolues, on obtient :

0,23	0,26	0,31	0,36	0,38	0,38	0,41	0,46

Ces variations absolues ne sont pas constantes puisqu'elles varient du simple au double.
En revanche, si on calcule les variations relatives, on obtient :

0,09	0,09	0,1	0,11	0,1	0,09	0,09	0,09

Ces variations relatives sont relativement constantes.
Ici, le modèle linéaire ne s'applique pas. On constate un autre type d'évolution dans lequel ce ne sont pas les variations absolues mais les variations relatives qui sont (approximativement) constantes. Dans ce cas, on parle **d'évolution exponentielle**.

Définition n°3. ***Suite géométrique***

On dit qu'une quantité u dépendant d'un entier naturel n a une **variation exponentielle** si sa variation relative $\frac{u(n+1)-u(n)}{u(n)}$ a une valeur constante t (c'est -à-dire une valeur t qui ne dépend pas de n).
Le nombre $\boldsymbol{t}$ est alors appelé **le taux de variation** de u .
Dans ce cas, la variation absolue $u(n+1)-u(n)$ est proportionnelle à $u(n)$.
La suite des valeurs $u(n)$ est alors appelée **une suite géométrique** de raison $\boldsymbol{q = 1+t}$.

Propriété n°3.

Si une suite de valeurs $u(n)$ est une suite géométrique de raison q alors, pour tout entier naturel n ,
$\boxed{u(n) = u(0)\times q^n}$

Exemple n°4.

Reprenons l'exemple précédent de la population mondiale. Notons u la population mondiale en prenant 5 années comme unité de temps et $n=0$ pour l'année 1950.
Alors, le taux de variation de u est $t \approx 0{,}1$ donc la raison de u est $q \approx 0{,}1$.
Ainsi, pour tout entier naturel n , $u(n) \approx 2{,}54\times 1{,}1^n$.
Dans ce modèle, la population en 2020 est estimée à $u(14) \approx 2{,}54\times 1{,}1^{14} \approx 9{,}64$ milliards de personnes
car $2020 = 1950+5\times 14$ donc 2020 correspond à l'année $n=14$.

Remarque n°3.

Dans le document cité précédemment, l'ONU évalue la population mondiale en 2020 à 7,79 milliards d'individus donc l'estimation est plus élevée que la réalité. À ce rythme, la population mondiale en 2050
serait u(20) ≈ 2,54 × 1,1 20 ≈ 17 milliards d'individus. Cependant, pour diverses raisons (le manque de ressources notamment) la progression sera

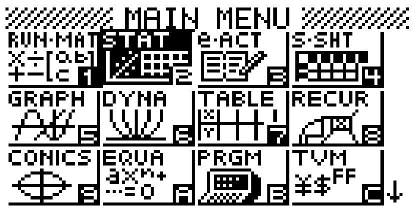
moindre et l'ONU estime que la population mondiale en 2050 sera de l'ordre de 10 milliards d'individus .

Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Population_mondiale.

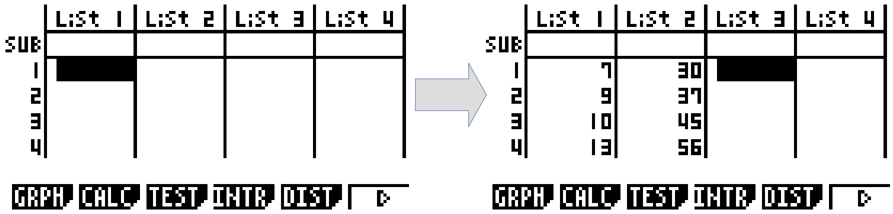
IV Fiches méthodes pour la calculatrice

IV.1 Droite d'ajustement avec la CASIO

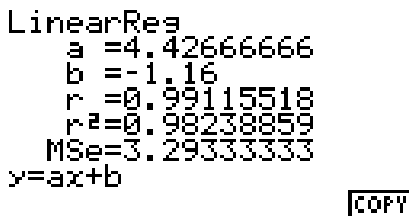
On choisit le menu STAT



Dans *List* 1 on rentre les valeurs de x_i et dans *List* 2 on rentre les valeurs de y_i

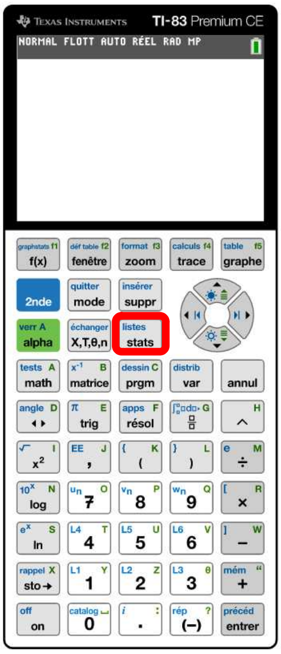


On obtient a et b

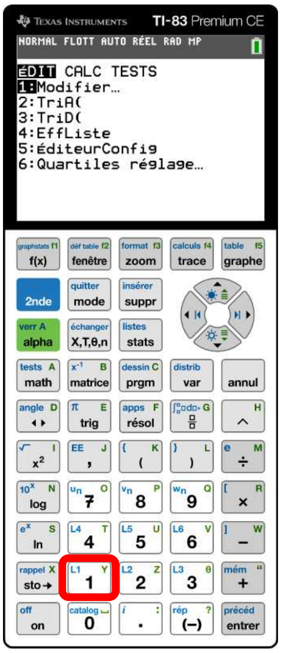


RETOUR

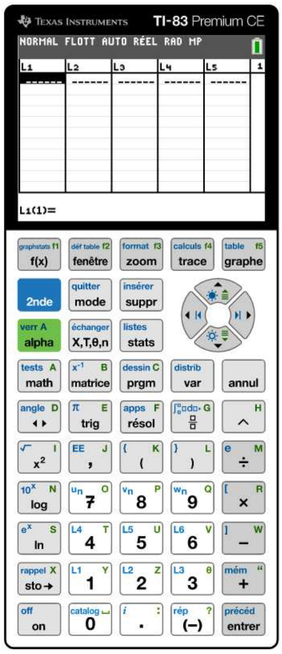
IV.2 Droite d'ajustement avec la TI-83



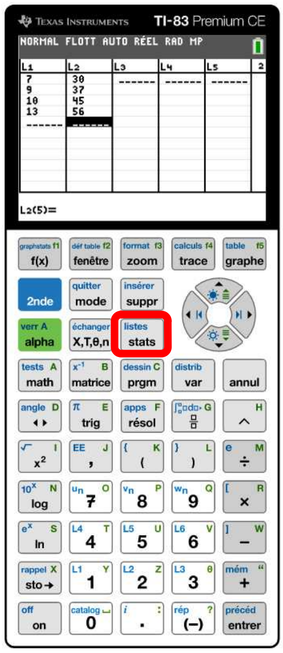
Touche STAT



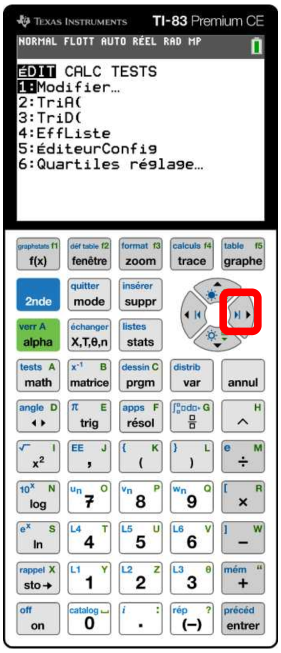
Touche 1



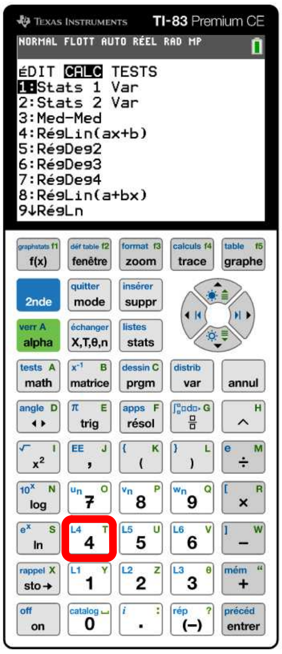
On remplit...



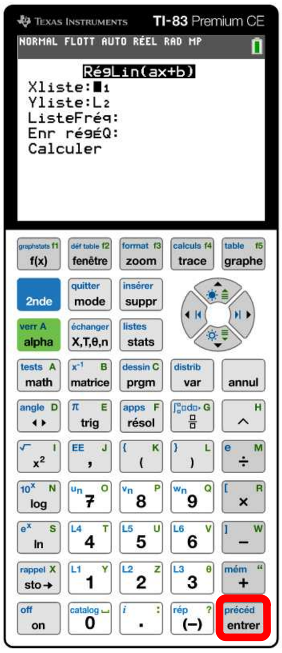
Touche STAT



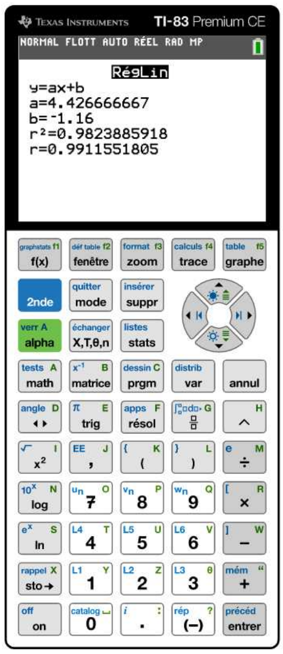
On choisit CALC



Touche 4



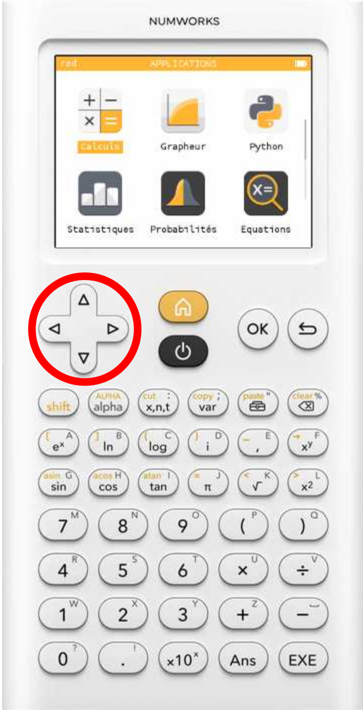
- On verifie les listes
- On sélectionne Calculer
- On valide avec entrer



On obtient
a et b

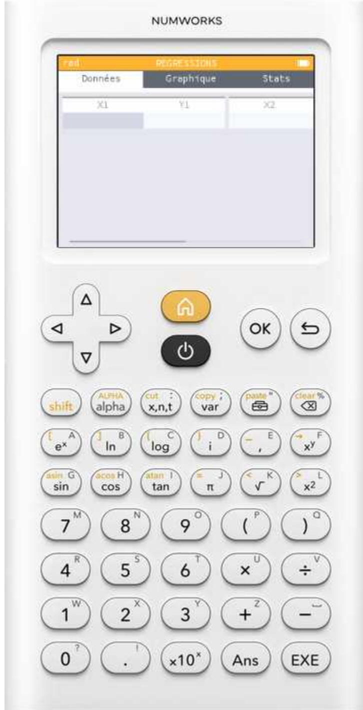
RETOUR

IV.3 Droite d'ajustement avec la NUMWORKS

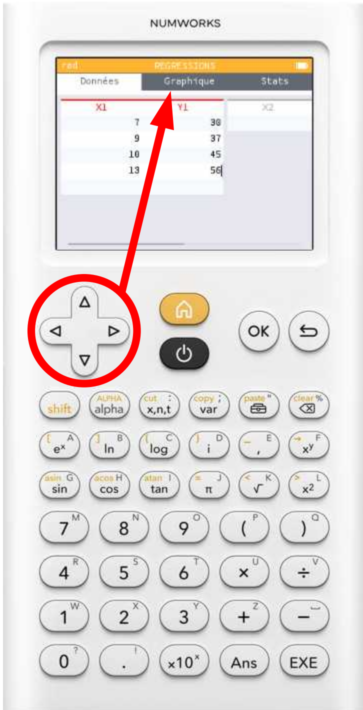


On sélectionne Regression

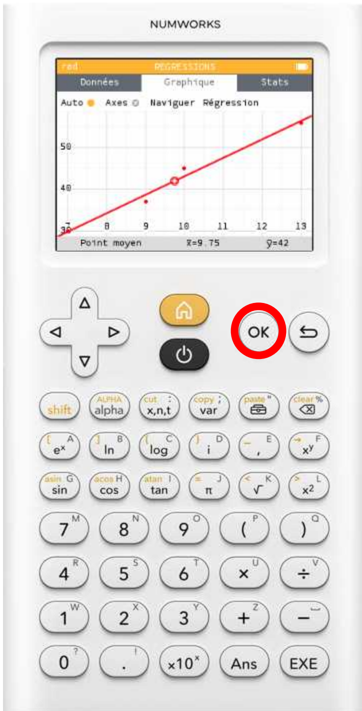
On valide



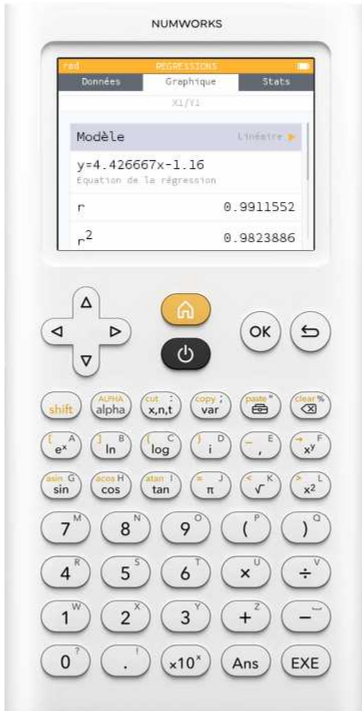
On remplit...



On sélectionne Graphique et on valide



On valide encore une fois



On obtient l'équation réduite

RETOUR