LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

I Une étude de la fonction logarithme décimal

Définition n°1. ***(qui découle d'une propriété que l'on admet)***

Soit un nombre réel $a > 0$. Le logarithme décimal de a est le nombre réel c tel que : $10^c = a$

Il est noté $\log a$.

On a donc $c = \log(a)$ si et seulement si $10^c = a$

Définition n°2. ***La fonction log***

On appelle fonction logarithme décimal la fonction :

$$\log : \begin{cases}]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \log(x) \end{cases}$$

Exemple n°1.

$\log(1)=0$, $\log(10)=1$, $\log(100)=2$ …

Remarque n°1.

Parfois, quand il n'y a pas d'ambiguïté, les parenthèses sont omises. Par exemple, on peut voir écrit « log 10 = 1 » à la place de « log(10) = 1 ».

Nous éviterons toutefois, cette simplification cette année...

Propriété n°1. ***(Admise)***

La fonction logarithme décimal est strictement croissante.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\log(x)$	$-\infty$ ↗	

Remarque n°2. ***Comparaison***

Cela signifie qu'elle conserve l'ordre :

Pour tout réels a et b strictement positifs,

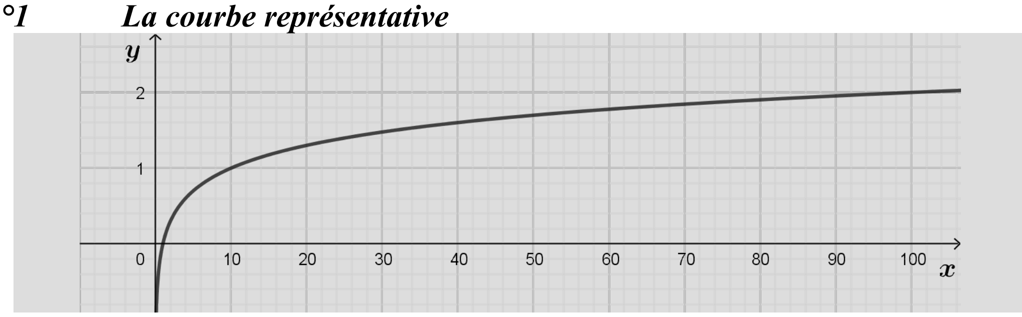
si $a < b$ alors $\log a < \log b$.

Propriété n°2. ***Tableau de signes de la fonction logarithme décimal***

Tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Connaissance n°1 ***La courbe représentative***



Remarque n°3.

À l'inverse des fonctions exponentielles (de base strictement supérieure à 1) , la croissance de la fonction logarithme décimal est très « lente ».

Pour atteindre 3 en ordonnées il faut faudra atteindre 1000 en abscisses…

Remarque n°4. ***Ne pas tout mélanger***

La fonction logarithme décimal, n'est pas la fonction logarithme népérien (ln) mais elles sont en relation : Pour tout $a > 0$, $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$

II Utiliser la fonction logarithme décimal

Propriété n°3. ***(Admise)***

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

$$\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$$

Exemple n°2.

$$\log(300) = \log(100 \times 3) = \log(100) + \log(3) = 2 + \log(3)$$

Propriété n°4. ***(Admise)***

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

$$\boxed{\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)}$$

$$\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$$

Exemple n°3.

- $\log(0{,}001) = \log\left(\frac{1}{1000}\right) = -\log(1000) = -3$
- $\log(0{,}007) = \log\left(\frac{7}{1000}\right) = \log(7) - \log(1000) = \log(7) - 3$

Propriété n°5. ***(Admise)***

Pour tous nombre réel strictement positif a et tout entier relatif n :

$$\boxed{\log(a^n) = n \times \log(a)}$$

Exemple n°4.

$\log(5{,}2^7) = 7 \times \log(5{,}2)$ (on écrit $7\log(5{,}2)$)

Propriété n°6.

Pour tous nombre réel strictement positif a et tout nombre réel x :

$$\boxed{\log(a^x) = x \times \log(a)}$$

Exemple n°5.

$\log(5{,}2^{-7{,}3}) = -7{,}3 \times \log(5{,}2)$ (on écrit $-7{,}3\log(5{,}2)$)

Propriété n°7. ***(Admise)***

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

$\boxed{x = y \Leftrightarrow \log(x) = \log(y)}$ et $\boxed{x < y \Leftrightarrow \log(x) < \log(y)}$

Remarque n°5.

Tous les autres symboles de comparaison sont bien sûr valables.
Cette dernière propriété nous permet de résoudre des équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ et des inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

Méthode n°1.

Résoudre l'équation $2^x = 100$

$$2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(100)$$
$$\Leftrightarrow x\log(2) = 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\log(2)}$$

En notant S l'ensemble des solutions : $S = \left\{\frac{2}{\log(2)}\right\}$

Résoudre l'inéquation $5^x < 0{,}001$

$5^x < 0{,}001 \Leftrightarrow \log(5^x) < \log(0{,}001)$
(car la fonction log est strictement croissante)

$$\Leftrightarrow x\log(5) < -3$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-3}{\log(5)}$$

(car $\log(5) > 0$)

En notant S l'ensemble des solutions : $S = \left]-\infty\ ;\ \frac{-3}{\log(5)}\right[$

Exemple n°6. ***Un exemple un peu plus complexe***

Résolvons l'inéquation suivante :

$$-5\times 0{,}2^{x}-3 \geqslant -4550003$$

$$\Leftrightarrow -5\times 0{,}2^{x}-3+3 \geqslant -4550003+3$$

On ne change pas le sens d'une inégalité en retranchant un même nombre à chaque membre

$$\Leftrightarrow -5\times 0{,}2^{x} \geqslant -4550000$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5\times 0{,}2^{x}}{-5} \leqslant \frac{-4550000}{-5}$$

On change le sens d'une inégalité en divisant chaque membre par un même nombre strictement négatif.

$$\Leftrightarrow 0{,}2^{x} \leqslant 910000$$

La fonction log étant strictement croissante, elle ne change pas les inégalités.

$$\Leftrightarrow \log\left(0{,}2^{x}\right) \leqslant \log(910000)$$

$$\Leftrightarrow x\times\log(0{,}2) \leqslant \log(910000)$$

Grâce à la propriété n°6

$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{\log(910000)}{\log(0{,}2)}$$

Car $\log(0{,}2)$ est négatif

Ainsi $-5\times 0{,}2^{x}-3 \geqslant -4550003$ quand $x \geqslant \dfrac{\log(910000)}{\log(0{,}2)} \approx -8{,}53$

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \left[\dfrac{\log(910000)}{\log(0{,}2)}\ ;+\infty\right[}$

Remarque n°6.

$$\frac{\log(910000)}{\log(0{,}2)} = \frac{\log\left(9{,}1\times 10^{5}\right)}{\log\left(2\times 10^{-1}\right)} = \frac{5+\log(9{,}1)}{-1+\log(2)}$$ mais est-ce plus parlant ?

Vous aurez surtout besoin de la valeur approchée…

III Compléments de cours

III.1 Un peu d'histoire

John Napier, 1614
Source : Wikipédia

En 1614, John Napier publie les premières tables de **logarithmes** :
logos = rapport, relation,
arithmeticos = nombre
Il n'a pas conscience qu'il décrit alors une nouvelle fonction.
La notation « Log » qui apparaît deux ans plus tard désigne alors le logarithme naturel (ou logarithme népérien qui n'est pas le logarithme décimal – voir la remarque n°4).
Il faudra attendre 1697 pour que Leibniz fasse le lien avec les fonctions exponentielles (et que nous puissions 3 siècles plus tard parler ensemble du logarithme décimal)

Gottfried Wilhelm Leibniz
Source : Wikipédia

IV Quelques démonstrations

Pour les curieux, nous démontrons dans ce paragraphe quelques propriétés du logarithme décimal.

Dans la définition n°1, l'existence et l'unicité du réel c tel que $10^c = a$ sont admises et le resteront à notre niveau…

En revanche, nous pouvons démontrer les propriétés 3 à 6… C'est parti.
Soient a et b des réels strictement positifs.

On peut écrire (grâce à la définition n°1) que $a=10^c$ et $b=10^d$ avec c et d des nombres réels.

On a alors :

- $\log(a \times b) = \log(10^c \times 10^d) = \log(10^{c+d}) = c+d = \log(a)+\log(b)$

ainsi $\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$

- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\frac{10^c}{10^d}\right) = \log(10^{c-d}) = c-d = \log(a)-\log(b)$

ainsi $\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$ et si $a=1$ $\boxed{\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)}$

- Soit également un réel x

$$\log(a^x) = \log\left((10^c)^x\right) = \log(10^{x \times c}) = x \times c = x \times \log(a)$$

ainsi $\boxed{\log(a^x) = x \times \log(a)}$

en particulier pour $x = n$ un entier relatif $\boxed{\log(a^n) = n \times \log(a)}$