LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

I Définition et propriétés algébriques

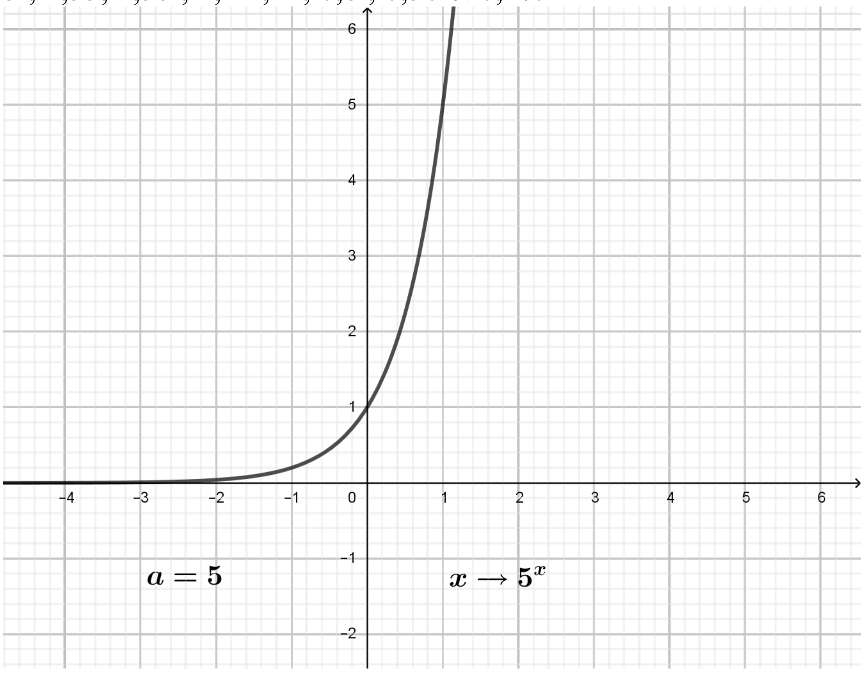
Définition n°1. Fonctions exponentielles de base a.

Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \to a^x$

Exemple n°1.

Les fonctions $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 5^x \end{cases}$, $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2{,}55^x \end{cases}$, $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1{,}57^x \end{cases}$, $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1{,}22^x \end{cases}$, $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1^x = 1 \end{cases}$, $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}8^x \end{cases}$, $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}56^x \end{cases}$ et $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 0{,}17^x \end{cases}$ sont des fonctions exponentielles de bases respectives : 5 ; 2,55, 1,57 ; 1,22 ; 1 ; 0,8 ; 0,56 et 0,17.

Cliquez sur la figure



Remarque n°1.

Pour $a = 0$, on a la fonction $f : \begin{cases}]0\ ;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to 0 \end{cases}$

Propriété n°1. Propriétés algébriques (admises)

Soit a et b deux réels strictement positifs.
Pour tous rées x et tout réel y :

$a^x \times a^y = a^{x+y}$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^x \times b^x = (a \times b)^x$

$(a^x)^y = a^{x \times y}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Exemple n°2.

- $1{,}3^{2{,}3} \times 1{,}3^{0{,}7} = 1{,}3^{2{,}3+0{,}7} = 1{,}3^3 = 2{,}197$; ▪ $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2}$;
- $(4{,}37^{2{,}1})^3 = 4{,}37^{2{,}1 \times 3} = 4{,}37^{6{,}3}$;
- $\dfrac{5{,}2^{3{,}1}}{5{,}2^{1{,}7}} = 5{,}2^{3{,}1-1{,}7} = 5{,}2^{1{,}4}$;
- $\dfrac{9{,}31^{4{,}3} \times 9{,}31^{-2{,}7} \times 9{,}31^{1{,}1}}{9{,}31^{-3}} = 9{,}31^{(4{,}3-2{,}7+1{,}1)-(-3)} = 9{,}31^{5{,}7}$.

II Sens de variation

Propriété n°2. ***(admise)***

Soit a un réel strictement positif , et $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to a^x\end{cases}$

- Si $a > 1$ alors f est strictement croissante,
- si $a = 1$ alors f est constante,
- si $0 < a < 1$ alors f est strictement décroissante.

Propriété n°3. ***(admise)***

Soit a un réel strictement positif , k un réel non nul et :

$g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to k\times a^x\end{cases}$

- Si $k > 0$ et :
  - si $a > 1$ alors g est strictement croissante,
  - si $a = 1$ alors g est constante,
  - si $0 < a < 1$ alors g est strictement décroissante.
- Si $k < 0$ et :
  - si $a > 1$ alors g est strictement décroissante,
  - si $a = 1$ alors g est constante,
  - si $0 < a < 1$ alors g est strictement croissante.

Remarque n°2.

On peut résumer cette dernière propriété de la façon suivante :

- Si $k > 0$ alors $x\to k\cdot a^x$ se comporte comme $x\to a^x$ et .
- Si $k < 0$ alors $x\to k\cdot a^x$ se comporte à l'inverse de $x\to a^x$.

Remarque n°3.

Si $k=0$ alors la fonction $x\to k\cdot a^x$ est la fonction nulle…

Exemple n°3.

Étudions les variations des fonctions suivantes définies pour tout réel x par :

$f_1(x) = 3{,}1^x$	$f_1(x) = a^x$ avec $a=3{,}1 > 1$. Donc f_1 est strictement croissante.
$f_2(x) = 0{,}23^x$	$f_2(x) = a^x$ avec $a=0{,}23$ et $0 < a < 1$ Donc f_2 est strictement décroissante.
$f_3(x) = 4\times3{,}1^x$	$f_3(x) = k\times a^x$ avec $k > 0$ et $a > 1$ Donc f_3 est strictement croissante.
$f_4(x) = -5\times3{,}1^x$	$f_4(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $a > 1$ Donc f_4 est strictement décroissante.
$f_5(x) = 4\times0{,}23^x$	$f_5(x) = k\times a^x$ avec $k > 0$ et $0 < a < 1$ Donc f_5 est strictement décroissante.
$f_6(x) = -5\times0{,}23^x$	$f_6(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $0 < a < 1$ Donc f_6 est strictement croissante.
$f_7(x) = \dfrac{-0{,}23^x}{5}$	$f_7(x) = k\times a^x$ avec $k < 0$ et $0 < a < 1$ Donc f_7 est strictement croissante. ($k=-1/5$)

III Moyenne géométrique

Définition n°2.

Soit n un entier naturel non nul et a_1 , a_2 , … , a_{n-1} , a_n des réels strictement positifs.
On appelle moyenne géométrique des a_1 , a_2 , … , a_{n-1} , a_n le nombre :

$$(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Exemple n°4.

La moyenne géométrique de $0{,}5\ ;\ 0{,}78\ ;\ 1{,}3$ et $1{,}78$ vaut :

$$(0{,}5 \times 0{,}78 \times 1{,}3 \times 1{,}78)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}9747 \text{ à } 0{,}0001 \text{ près}$$

Méthode n°1. Calculer un taux moyen d'évolution

Soit n un entier naturel non nul.
Si CM est le coefficient multiplicateur global sur n évolutions alors le taux moyen d'évolution est le réel $t = CM^{\frac{1}{n}} - 1$

Exemple n°5.

On donne 5 taux d'évolutions et on veut calculer t , le taux moyen d'évolution équivalent à ces 5 évolutions.

Une hausse de 30 % ($t_1 = 0{,}3$ et $CM_1 = 1{,}3$)
Une hausse de 15 % ($t_2 = 0{,}15$ et $CM_2 = 1{,}15$)
Une baisse de 5 % ($t_3 = -0{,}05$ et $CM_3 = 0{,}95$)
Une hausse de 10 % ($t_4 = 0{,}1$ et $CM_4 = 1{,}1$)
Une baisse de 20 % ($t_5 = -0{,}2$ et $CM_5 = 0{,}8$)

On calcule le Coefficient Multiplicateur global CM :

$$CM = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times CM_4 \times CM_5 = 1{,}24982$$

Ainsi :

$$t = CM^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$t = 1{,}24982^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0{,}0456 \text{ à } 0{,}0001 \text{ près}$$

Soit une hausse d'environ $4{,}56\,\%$