LA FONCTION INVERSE

Remarque n°1.

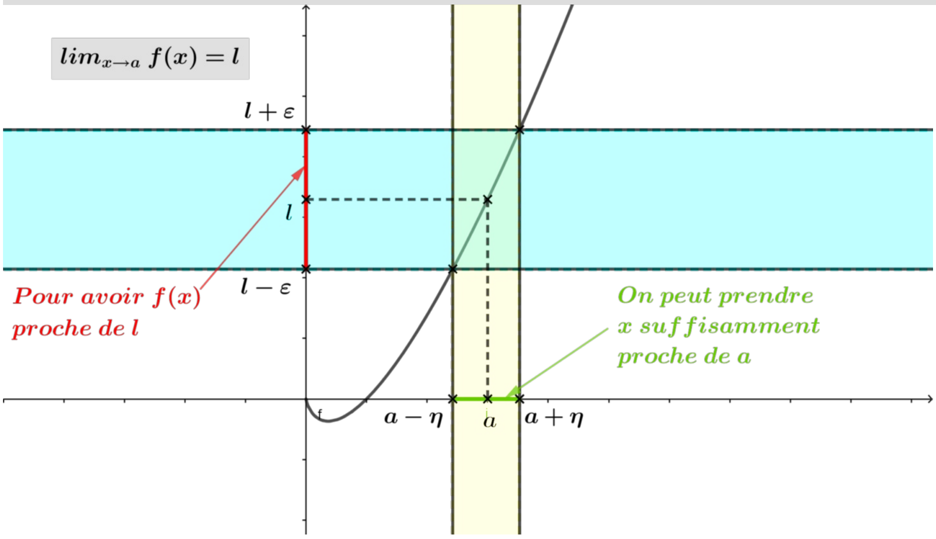
Dans ce cours, nous utiliserons la notion de limite. Conformément au programme nous nous contenterons d'une approche intuitive.
Pour une fonction f , D_f représentera son ensemble de définition et sera un intervalle ou une réunion d'intervalles.

I Qu'est-ce qu'une limite ?

Connaissance n°1 Limite finie en un point

Soit $f:\begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$, $a \in \overline{D_f}$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite l en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de l que l'on veut en approchant suffisamment x de a .

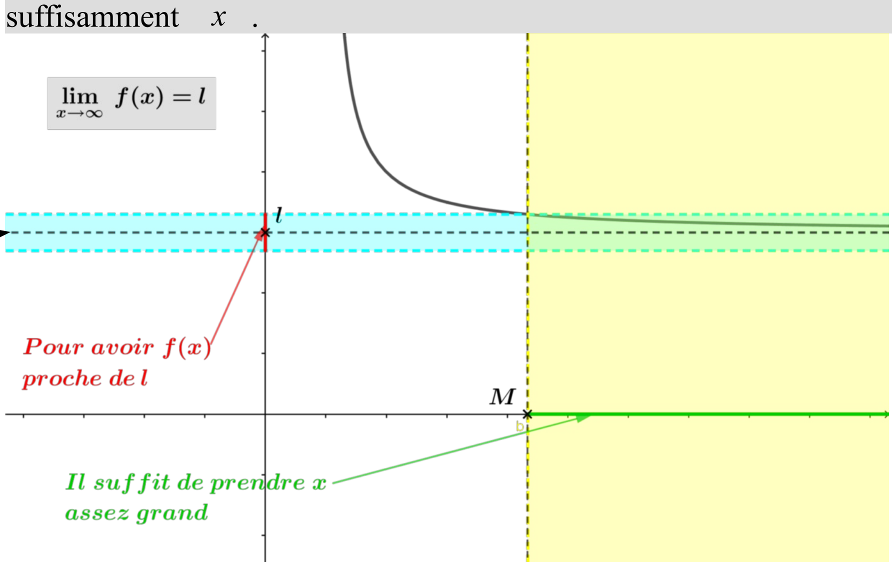


Connaissance n°2 Limite finie en l'infini

Soit $f:\begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$, D_f ayant $+\infty$ pour extrémité et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de l que l'on veut en augmentant suffisamment x .

Vocabulaire
Lorsque x grandit, la courbe s'approche de plus en plus de la droite d'équation $y = l$.
On dit que cette droite est **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.



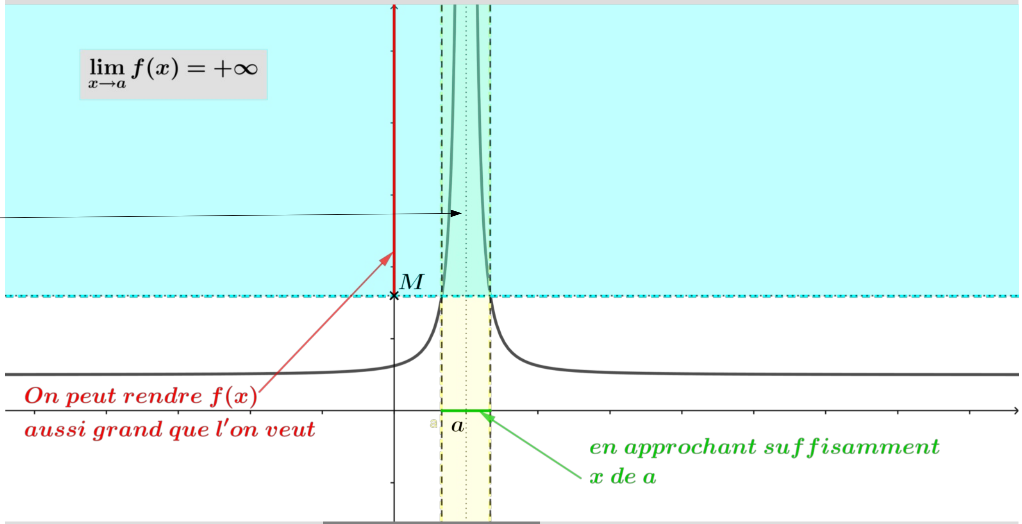
On explique de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Connaissance n°3 ***Limite infinie en un point***

Soit $f:\begin{cases} D_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ et $a \in \overline{D_f}$.

On dit que $\boxed{f \text{ a pour limite } +\infty \text{ en } a}$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$ si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut en approchant suffisamment x de a .

Vocabulaire
Lorsque x s'approche de a , la courbe s'approche de plus en plus de la droite d'équation $x = a$.
On dit que cette droite est **asymptote verticale** à la courbe en a .



On explique de même $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$

Remarque n°2. ***Limite à droite, limite à gauche***

Il arrive parfois que des phénomènes différents se produisent selon que l'on s'approche de a par la gauche ou par la droite.

On peut par exemple avoir $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$

Ici, la limite de f à gauche en a est $-\infty$
et la limite à droite de f en a est $+\infty$.

II Et la fonction inverse dans tout ça ?

Nous allons à présent pouvoir parler du comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition…

Définition n°1.

On appelle fonction inverse, la fonction $f:\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

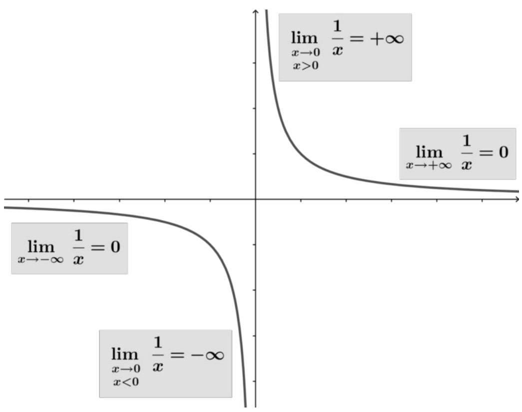
Avec $\mathbb{R}^* =]-\infty \,;\, 0[\cup]0 \,;\, +\infty[$.

Propriété n°1.

Limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à l'hyperbole.

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à l'hyperbole.



Propriété n°2. ***Dérivée de la fonction inverse***

Soit $f:\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty\ ;\ 0[}$; $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0\ ;\ +\infty[}$

et pour x dans l'un ou l'autre de ces intervalles

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$$

preuve :

▪ Soit $a\in]-\infty\ ;\ 0[$ et h tel que $]a-h\ ;\ a+h[\ \subset\ ]-\infty\ ;\ 0[$

On peut écrire :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{-h}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

En faisant tendre h vers 0 , on obtient : $-\dfrac{1}{a^2}$

Le nombre dérivée de f en a existe donc pour tout $a\in]-\infty\ ;\ 0[$ et vaut $-\dfrac{1}{a^2}$.

On a donc démontré que f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et que pour $x\in]-\infty\ ;\ 0[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

▪ On procède de la même façon sur $]0\ ;\ +\infty[$ (faites-le).

▪ Ce qui achève la démonstration.

Remarque n°3.

▪ On a $f'(x)<0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

▪ On a $f'(x)<0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

donc f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

▪ Mais f n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

On peut à présent dresser le tableau de variation de la fonction inverse.

Connaissance n°4 ***Tableau de variation complet de la fonction inverse.***

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

III Complément de cours

Vous ne serez pas interrogés sur cette partie, mais elle vous aidera à comprendre les exercices...
On peut mener des calculs avec les limites en respectant les règles suivantes :

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.
Ici a et b désignent deux nombres réels et f et g sont des fonctions.

Propriété n°3. Limite d'une somme

$\lim f$	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	b	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f+g)$	$a+b$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Propriété n°4. Limite d'un produit

* signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

$\lim f$	a	$a \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	b	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$a \times b$	$*\ \infty$	$*\ \infty$	FI

Propriété n°5. Limite d'un quotient

* signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

$\lim f$	a	a	a	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$b \neq 0$	$\pm\infty$	0	b	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{a}{b}$	0	$*\ \infty$	$*\ \infty$	FI	FI