# *LES SUITES*

## *I Les suites arithmétiques*

### *I.1 Ce que l'on sait déjà*

***Définition n°1. Suite arithmétique***

Une suite $u$ est dite **arithmétique** si l'on **passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

***Exemple n°1.***

La suite $v$ de terme initial $v_0=5$ et de raison $r=-3$ .

$v_0=5$ , $v_1 = v_0+r = 5+(-3)=2$ , $v_2 = v_1+r = 2+(-3)=-1,\ldots$

***Propriété n°1. Relation de récurrence***

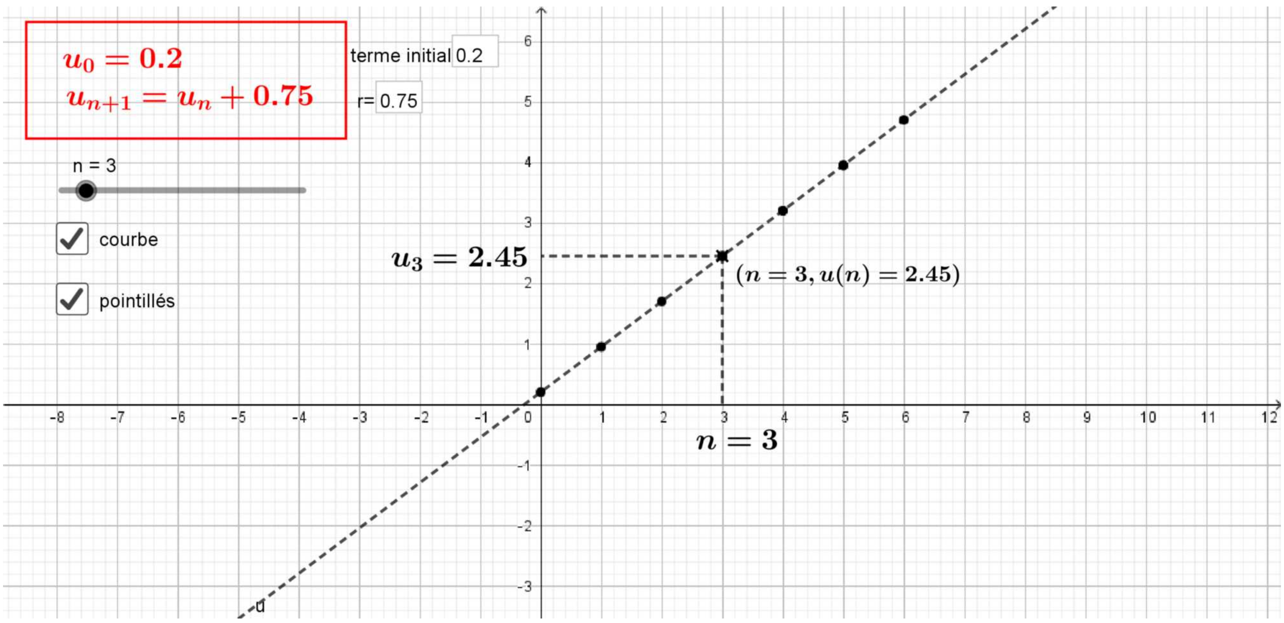
Si $u$ est une suite arithmétique de raison $r$ , de terme initial $k$ dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$ , $u:\begin{cases}u_0=k\\u_{n+1}=u_n+r\end{cases}$

(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte … )

***Propriété n°2. Représentation graphique***

▪ Si une suite est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.




***Propriété n°3. Sens de variation***

Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$ :

- si $r>0$ , la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $r=0$ , la suite est constante;
- si $r<0$ , la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

## I.2 Ce qui est nouveau

***Définition n°2.*** ***Moyenne arithmétique***

Soient $a$ et $b$ deux nombres.

La moyenne arithmétique des deux nombres $a$ et $b$ est : $\dfrac{a+b}{2}$ .

***Exemple n°2.***

La moyenne arithmétique des deux nombres 8 et 13,5 est : $\dfrac{8+13{,}5}{2} = 10{,}75$

***Propriété n°4.*** ***Expression en fonction de n du terme de rang n***

Si $(u_n)$ est une suite suite arithmétique de raison $r$ alors, pour tout $n$ et $p$ : $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p) \times r}}$

En particulier :

$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}}$ et $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1) \times r}}$

***Exemple n°3.***

On choisit la bonne formule selon l'indice de départ...

- Soit $(v_n)$ la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . Par exemple : $v_{250} = v_0+250\times r = -5+250\times 3 = 745$ .
- Soit $(w_n)$ la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . Par exemple : $w_{101} = w_1+(101-1)\times r = 2+100\times 1{,}5 = 152$ .
- Soit $(t_n)$ la suite arithmétique de raison $r=-2$ et de premier terme $t_0=10$ . Par exemple : $t_{300} = t_0+300\times r = 10+300\times(-2) = -590$ .

***Propriété n°5.*** ***Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique***

La somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique vaut :

$$\boxed{S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

***Méthode n°1.*** ***Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique***

- Soit $(v_n)$ la suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . On veut calculer la somme $A$ des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

Comme on « commence à zéro » le 10e terme est $v_9$ , on le calcule :
$v_9 = v_0+9\times r = -5+9\times 3 = 22$ .

$$A = 10 \times \frac{v_0 + v_9}{2} = 10 \times \frac{-5+22}{2} = 85$$

- Soit $(w_n)$ la suite arithmétique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . On veut calculer la somme $B$ des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{10} w_k = w_1+w_2+\ldots+w_{10}\right)$$

Comme on « commence à un» le 10e terme est $w_{10}$ , on le calcule :
$w_{10} = w_1+(10-1)\times r = 2+9\times 1{,}5 = 15{,}5$ .

$$B = 10 \times \frac{w_1 + w_{10}}{2} = 10 \times \frac{2+15{,}5}{2} = 87{,}5$$

# *II Les suites géométriques*

## *II.1 Ce que l'on sait déjà*

***Définition n°3. Suite géométrique***

Une suite $u$ est dite **géométrique** si l'on **passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

***Exemple n°4.***

La suite $v$ de terme initial $v_0=10$ et de raison $q=0,5$ .

$v_0=10$ , $v_1 = v_0\times q = 10\times 0,5=5$ , $v_2 = v_1\times q = 5\times 0,5=2,5,\ldots$

***Propriété n°6. Relation de récurrence***

Si $u$ est une suite géométrique de raison $q$ , de terme initial $k$ dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$ , $u:\begin{cases} u_0=k \\ u_{n+1}=u_n\times q \end{cases}$

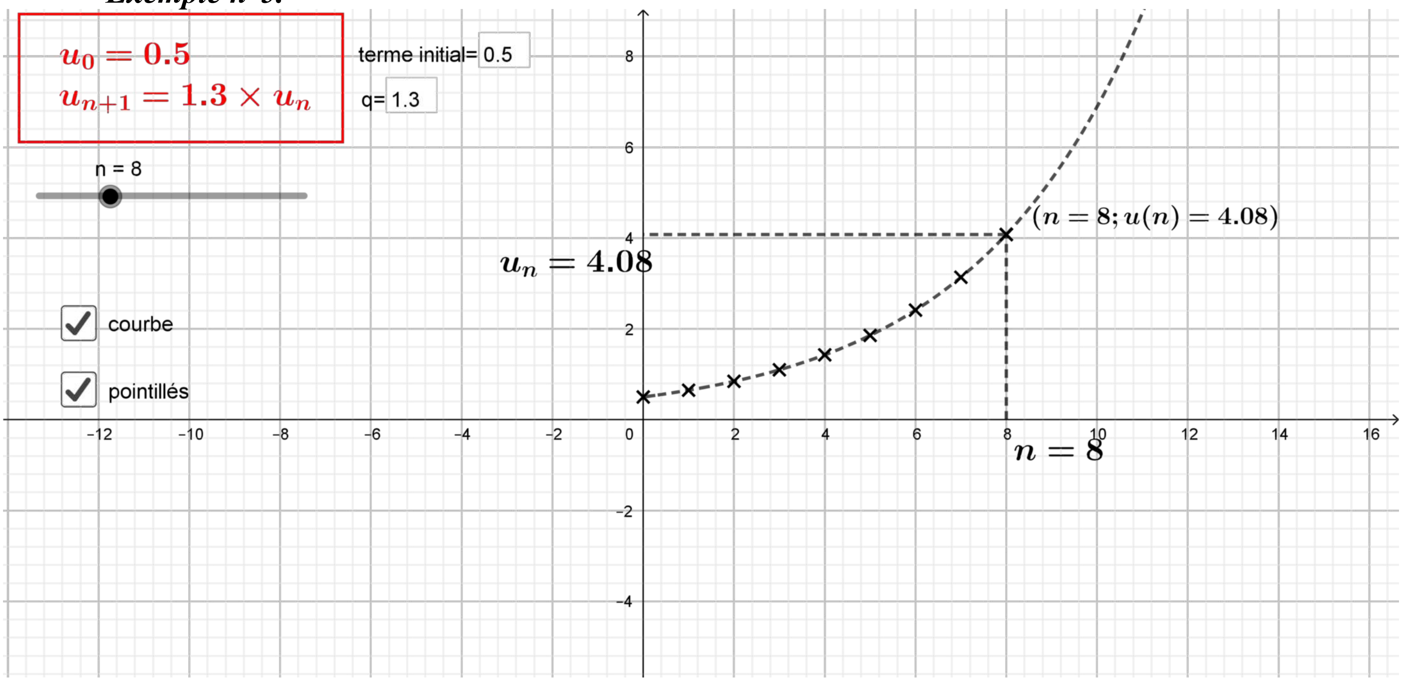
(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte … )

***Propriété n°7. Représentation graphique***

▪ Si une suite est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

***Exemple n°5.***




***Propriété n°8. Sens de variation***

Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme strictement positif :

- si $q>1$ , la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $q=1$ , la suite est constante;
- si $0<q<1$ , la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

## II.2 Ce qui est nouveau

***Définition n°4.*** ***Moyenne géométrique de deux nombres***

Soient $a$ et $b$ deux nombres de même signe.
La moyenne géométrique des deux nombres $a$ et $b$ est : $\sqrt{a \times b}$

***Remarque n°1.*** ***Attention***

Si les deux nombres ne sont pas de même signe alors leur produit est négatif et on ne peut pas extraire la racine carrée.

***Exemple n°6.***

- La moyenne géométrique de $4{,}8$ et $30$ vaut : $\sqrt{4{,}8 \times 30} = \sqrt{144} = 12$
- La moyenne géométrique de $-4{,}8$ et $-30$ vaut : $\sqrt{-4{,}8 \times (-30)} = \sqrt{144} = 12$
- On ne calcule pas la moyenne géométrique de $-4{,}8$ et $30$ ou de $4{,}8$ et $-30$ .

***Propriété n°9.*** ***Expression en fonction de n du terme de rang n***

Si $(u_n)$ est une suite suite géométrique de raison $q$ alors, pour tout $n$ et $p$ : $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{(n-p)}}$

En particulier :

$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ et $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{(n-1)}}$

***Exemple n°7.***

On choisit la bonne formule selon l'indice de départ...

- Soit $(v_n)$ la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . Par exemple : $v_9 = v_0 \times q^9 = -5 \times 3^9 = -98\ 415$ .
- Soit $(w_n)$ la suite géométrique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . Par exemple : $w_5 = w_1 \times q^{(5-1)} = 2 \times 1{,}5^4 = 10{,}125$ .

***Propriété n°10.*** ***Somme des n premiers termes d'une suite géométrique***

La somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ avec $\boldsymbol{q \neq 1}$ vaut :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

***Méthode n°2.*** ***Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique***

- Soit $(v_n)$ la suite géométrique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=-5$ . On veut calculer la somme $A$ des dix premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } A = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0+v_1+\ldots+v_9\right)$$

$$A = v_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = -5 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = -147\ 620$$

- Soit $(w_n)$ la suite géométrique de raison $r=1{,}5$ et de premier terme $w_1=2$ . On veut calculer la somme $B$ des 5 premiers termes.

$$\left(\text{C'est à dire } B = \sum_{k=1}^{5} w_k = w_1+w_2+w_3+w_4+w_5\right)$$

$$B = w_1 \times \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \times \frac{1-1{,}5^5}{1-1{,}5} = 26{,}375$$

***Remarque n°2.***

Si $q=1$ alors la suite est constante et la somme des $n$ premiers termes vaut simplement : $n \times \textit{premier terme}$