FONCTIONS PART3

I Fonction polynôme de degré 3

Définition n°1.

On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
On parle aussi de fonction du troisième degré.

Exemple n°1.

La fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$g(x)=4{,}5\,x^3+\frac{\sqrt{2}}{\pi}x^2-3\,x+5\sqrt{3}$ est une fonction du troisième degré.

Remarque n°1.

La fonction du troisième degré la plus simple est la **fonction cube** :
$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^3 \end{cases}$ (ici $a=1, b=c=d=0$)

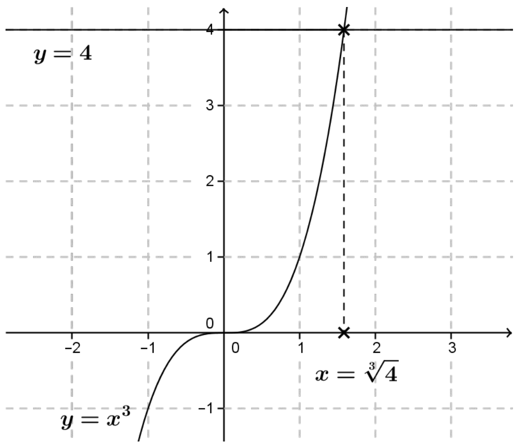
Propriété n°1. ***résoudre $x^3 = c$, avec c > 0 (admise)***

Soit c un réel positif. L'équation $x^3=c$ admet une unique solution qui est : $c^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{c}$

Exemple n°2.

$x^3 = 4 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$

Ainsi l'unique solution est $\sqrt[3]{4}$

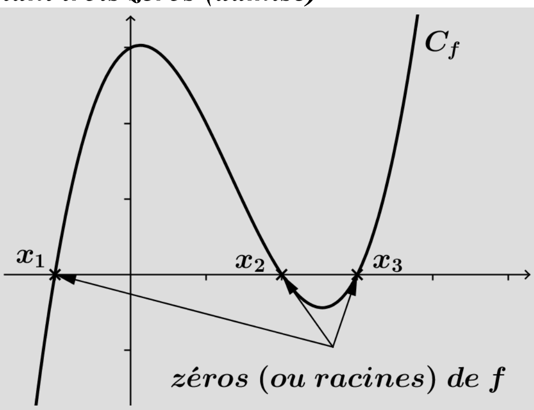


Remarque n°2.

Une équation du troisième degré peut avoir une ou trois solutions réelles.

Propriété n°2. ***Fonction du troisième degré admettant trois zéros (admise)***

Soit f une fonction de degré définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme développée :
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$(a \neq 0)$
Si l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 alors on peut écrire
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
(c'est bien le même a).



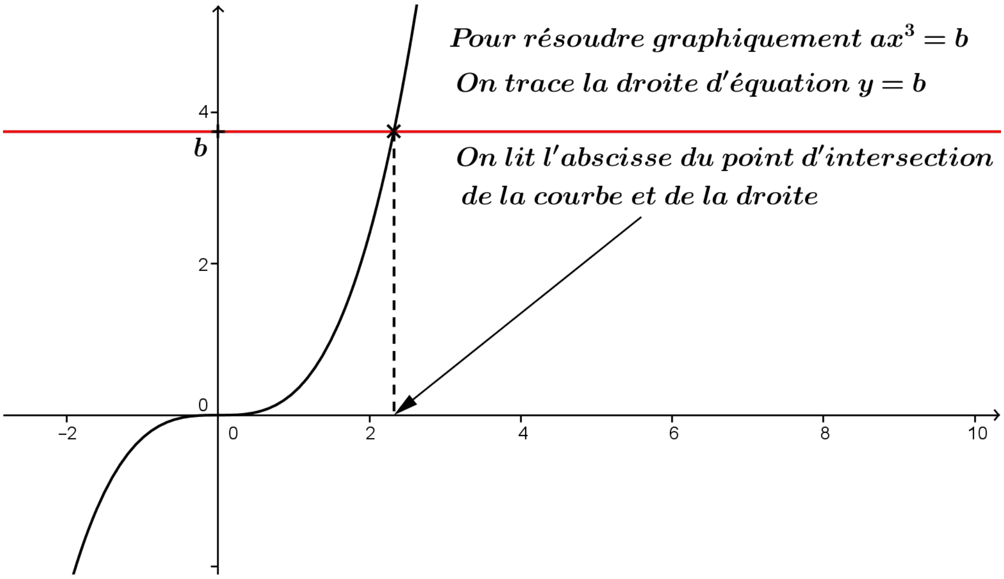
On parle alors de la forme factorisée de f .
Réciproquement, si une fonction de degré 3 est écrite sous forme factorisée :
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ alors x_1, x_2 et x_3 sont les zéros de la fonction.

Remarque n°3.

Souvent le mot « racine » sera employé à la place de « zéro ».

II Quelques savoir-faire

Méthode n°1. Résoudre graphiquement une équation du type $ax^3 = b$

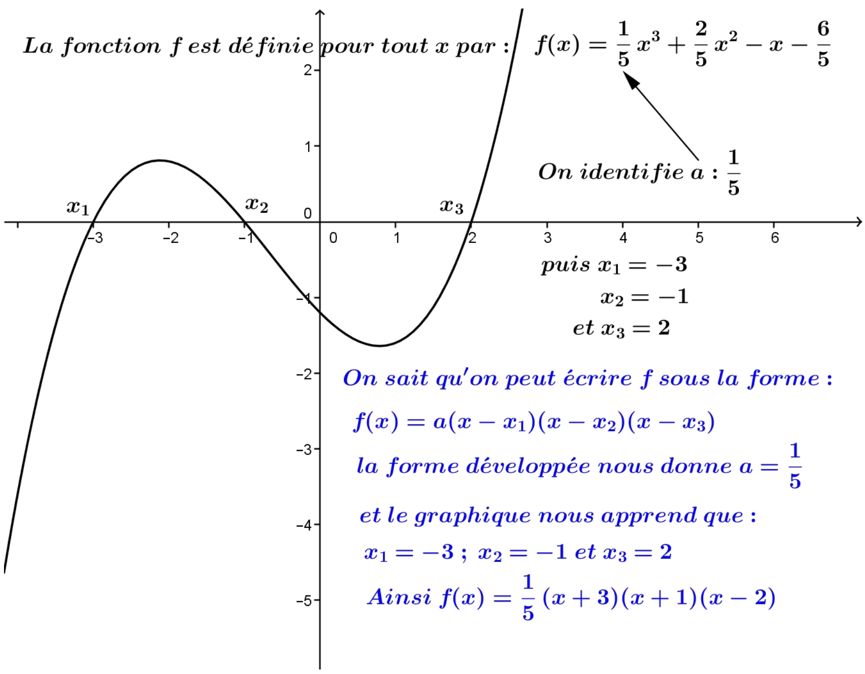


Méthode n°2. Résoudre algébriquement une équation du type $ax^3 = b$

Si $a \neq 0$ alors : $ax^3 = b \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

L' équation admet donc une solution : $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

Méthode n°3. Déterminer la forme factorisée avec l'aide du graphique.



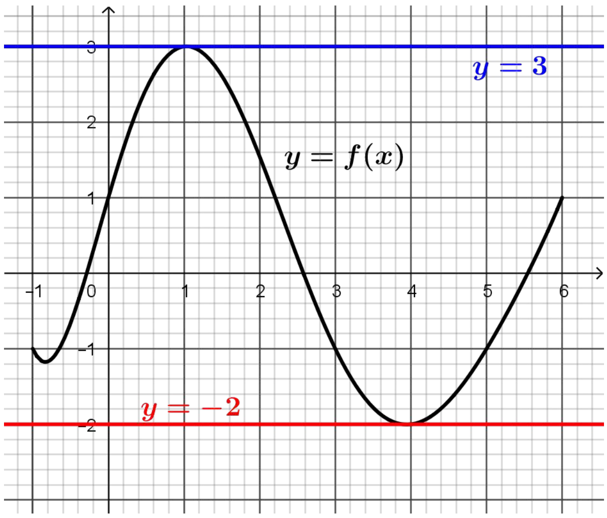
III Extremums d'une fonction

Définition n°2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$.
- On dit que $f(c)$ est un maximum de f sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(c)$.
- On dit que $f(c)$ est un minimum de f sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(c)$.

Exemple n°3.

Soit fonction f définie sur $I=[-1\ ;\ 6]$ et représentée ci-dessous.



- f admet un minimum sur I qui est le nombre $-2 = f(4)$.
- f admet un maximum sur I qui est le nombre $3 = f(1)$.

Remarque n°4. ***Extremum global ou local***

Dans l'exemple précédent, nous avons donné les extremums globaux de la fonction car nous avons considéré tout l'ensemble de définition.
On pourrait définir des extremums locaux en considérant un intervalle plus petit.
Par exemple, sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$, f admet $-1=f(5)$ comme minimum et $1=f(6)$ comme maximum.

Propriété n°3. ***(admise)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$ et $c \in \mathring{I}$. Si c est un extremum de f alors $f'(c)=0$.

Exemple n°4.

Notons $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ la fonction carrée. Nous savons que g admet un minimum en $c=0$. La propriété nous dit qu'alors $g'(0)=0$
Effectivement, pour tout x, $g'(x)=2x$ et $2\times 0=0$.

Remarque n°5.

La réciproque de cette propriété est fausse. Notons $h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3\end{cases}$ la fonction cube. On a $h'(0)=3\times 0^2=0$ et pourtant la valeur 0 n'est pas un extremum de la fonction. (Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

IV Un exemple d'étude de fonction

Après un énoncé quelconque, on nous annonce que tel ou tel phénomène peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur $[0\ ;\ 40]$ par :

$$f(x) = x^3-36x^2+285x-250$$

1) Montrer que $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$
2) En déduire les racines de f .
3) Déterminer une expression de $f'(x)$.
4) Montrer que $f'(x)=3(x-5)(x-19)$.
5) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
6) Dresser le tableau des variations de $f(x)$.
7) Quels sont les extremums (ou extrema) de la fonction f ?
8) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 7.

La correction qui résume les savoirs-faire sur les fonctions que vous devez maîtriser.

1) Montrer que $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$.

$$\begin{aligned}(x-1)(x-10)(x-25) &= (x-1)[x^2-25x-10x+250] \\ &= (x-1)[x^2-35x+250] \\ &= x^3-35x^2+250x-x^2+35x-250 \\ &= x^3-36x^2+285x-250 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

On développe et on réduit le produit donné et on tombe bien sûr sur $f(x)$.
Par contre, on ne commence pas par écrire « $f(x)=$ » car c'est ce que l'on veut obtenir.
Ainsi, on a bien : $f(x) = (x-1)(x-10)(x-25)$.

2) En déduire les racines de f .

Les racines de f sont $\boxed{1\ ;\ 10 \text{ et } 25}$.

3) Déterminer une expression de $f'(x)$.

On note l'expression de $f(x)$ donc sans le $'$

$f(x) = x^3-36x^2+285x-250$

Puis on commence à déterminer celle de $f'(x)$ donc avec le $'$

$f'(x) = 3x^2-36\times 2x+285\times 1-0$

On simplifie bien sûr cette expression

$\boxed{f'(x) = 3x^2-72x+285}$

4) Montrer que $f'(x)=3(x-5)(x-19)$

$$\begin{aligned}3(x-5)(x-19) &= 3[x^2-19x-5x+95] \\ &= 3(x^2-24x+95) \\ &= 3x^2-72x+285 \\ &= f'(x)\end{aligned}$$

On développe et on réduit le produit donné et on tombe bien sûr sur $f'(x)$
Par contre, on ne commence pas par écrire « $f'(x)=$ » car c'est ce que l'on veut obtenir.
Ainsi, on a bien : $f'(x)=3(x-5)(x-19)$.

5) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

On travaille avec la forme factorisée de $f'(x)$.

Il y a 3 facteurs, on résoudra donc 3 inéquations qui nous permettront de savoir où placer les « + » dans le tableau (c'est pour cela que les inéquations sont du type « >0 »):

$3>0$ est vraie quelque soit la valeur de x

$x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

$x-19>0 \Leftrightarrow x>19$

x	0		5		19		40
3		+	|	+	|	+	
$x-5$		−	0	+	|	+	
$x-19$		−	|	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Les signes ne s'écrivent pas en dessous des nombres mais entre eux.
Étudions la 1ere colonne de signes (on va de haut en bas) :
Le 1er + signifie que pour tous les nombres (x) appartenant à $[0\ ;\ 5[$, 3 est strictement positif (élémentaire mon cher Watson…).
Le − qui suit signifie que pour tous les nombres (x) appartenant à $[0\ ;\ 5[$, $x-5$ est strictement négatif.
Le − suivant signifie que pour tous les nombres (x) appartenant à $[0\ ;\ 5[$, $x-19$ est strictement négatif.
Sur $[0\ ;\ 5[$ les trois facteurs ont un signe constant, on peut donc appliquer sans risque la règle des signes pour obtenir que sur $[0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ est strictement positif
(« + par − par − ça donne + »)
On a fait la même chose avec les autres colonnes

6) Dresser le tableau des variations de $f(x)$.

On va se servir de la question précédente et je vais ajouter une ligne cyan (et hé oui c'est la couleur utilisée ici) qui rappellera la dernière du tableau précédent. Cette ligne n'est pas à écrire sur la copie .

x	0		5		19		40
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$f(0)=-250$	↗	$f(5)=400$	↘	$f(19)=-972$	↗	$f(40)=7550$

7) Quels sont les extremums (ou extrema) de la fonction f ?

Le maximum vaut 7550 et est atteint quand $x=40$
Le minimum vaut -972 et est atteint quand $x=19$
On peut remarquer que 400 n'est qu'un maximum local (par exemple sur $[0\ ;\ 19]$)
Il faut donc faire attention et ne pas oublier les valeurs extrêmes de l'ensemble de définition.

8) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 7.

Une équation de la tangente au point d'abscisse est :
$y=f'(7)(x-7)+f(7)$
On remplace $f'(7)$ et $f(7)$ par leur valeur
$y=324(x-7)-72$
On développe et réduit l'expression
$\boxed{y=324x-2340}$