FONCTIONS PART2

I Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

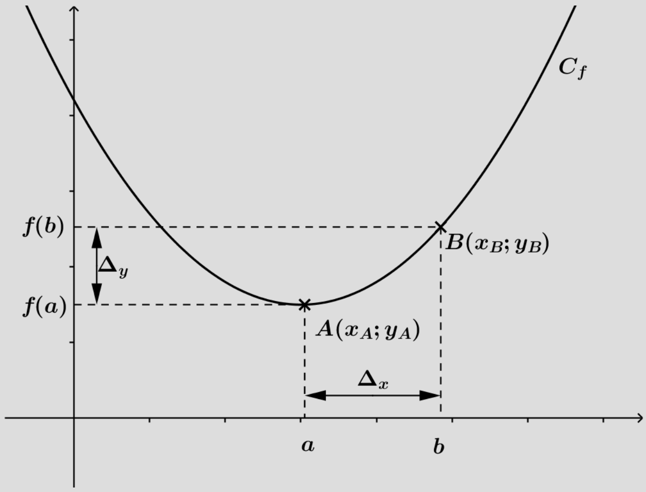
Définition n°1.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux nombres a et b appartenant à I. On appelle taux de variation entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Remarque n°1.

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où $\Delta_y=y_B-y_A$ et $\Delta_x=x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

Remarque n°2.

Le taux de variation entre a et b est donc le coefficient directeur de la droite (AB).

Remarque n°3.

Attention, à ne pas confondre taux de variation et taux d'évolution.

Définition n°2.

La droite (AB) est une sécante à la courbe C_f passant par A.

Remarque n°4.

On aurait pu faire la même phrase avec B mais dans la suite on va « fixer » A et « faire varier » B.

II Nombre dérivé

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points A et B sont proches l'un de l'autre. L'intérêt de cette remarque étant qu'il est facile d'étudier le comportement d'un droite… geogebra

Définition n°3. ***(un peu hors programme...)***

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathring{I}$

On appelle nombre dérivé de f en a et on note si cela existe :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque n°5. ***Nombre dérivé d'une fonction f en a.***

La notion de limite n'étant pas au programme, on se contentera de dire que :

$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

Exemple n°1.

Soit $f:=\begin{cases}\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\\ x\to x^2+5\end{cases}$, déterminons le nombre dérivé de f en 3 .

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h}=\frac{h^2+6h+9+5-9-5}{h} = h+6$$

On faisant « tendre h vers 0 » , on obtient 6.

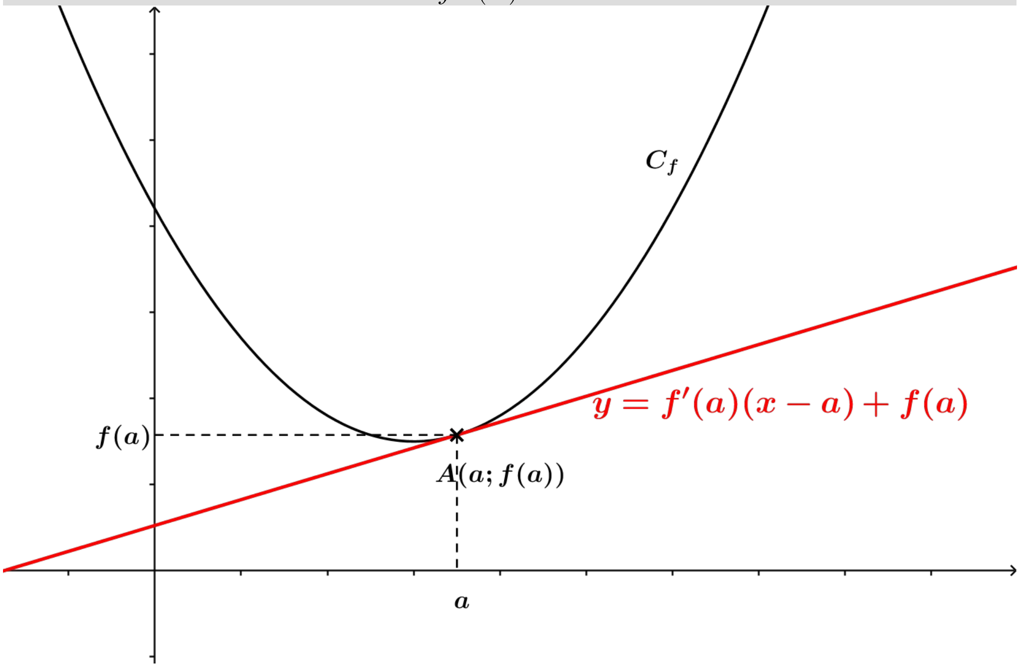
Donc $f'(3)=6$.

III Tangente à la courbe C_f au point $(a\ ;\ f(a))$

Comme annoncé à la remarque n°4, nous allons faire « tendre B vers A » et notre sécante va devenir une tangente.
En notant $B(a+h\ ;\ f(a+h))$, on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre, quand h tend vers 0 , vers $f'(a)$.

Définition n°4.

La tangente T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarque n°6.

Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(a)$ par définition.
Comme de plus, $A(a\ ;\ f(a))$ appartient à C_f, on obtient que :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
d'où l'on déduit que :
$p=f(a)-a\times f'(a)$
Ainsi l'équation réduite de C_f peut s'écrire :
$y=f'(a)x+f(a)-a\,f'(a)$
que l'on simplifie en : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour obtenir la propriété suivante.

Propriété n°1. ***Équation de la tangente***

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle I et $a\in I$.
Si elle existe, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

IV Fonction dérivée d'une fonction

Définition n°5.

$f:=\begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Si pour tout nombre réel x appartenant à l'intérieur de I, $f'(x)$ existe alors on dit que la fonction f est dérivable sur l'intérieur de I et on appelle fonction dérivée de f, la fonction notée f' définie par

$f':=\begin{cases} \mathring{I} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$

Exemple n°2.

Reprenons la fonction de l'exemple n°1, $f:=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x^2+5 \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2+5-x^2-5}{h} = 2x+h$$

En faisant « tendre h vers 0 », on obtient $2x$.

Ainsi $f'(x)=2x$.

Ceci étant valable pour tout réel x, nous venons de démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est : $f':=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to 2x \end{cases}$

IV.1 Quelques fonctions dérivées de référence

Remarque n°7. Fonction dérivée d'une fonction constante

Si f est une fonction constante sur I, autrement dit pour tout $x \in I$ $f(x)=k$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors :

$f(x+h)-f(x)=k-k=0$ pour tout h, on en déduit que $f'(x)=0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

Remarque n°8. Fonction dérivée de la fonction identité

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x \end{cases}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

Propriété n°2. Fonction dérivée de la fonction carré

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{cases}$ alors $f':=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to 2x \end{cases}$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

qui « tend vers $2x$ » quand « h tend vers 0 ».

Propriété n°3. Fonctions dérivée de la fonction cube

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x^3 \end{cases}$ alors $f':=\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to 3x^2 \end{cases}$

preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

qui « tend vers $3x^2$ » quand « h tend vers 0 » .

IV.2 Quelques opérations sur les fonctions dérivées

Propriété n°4. ***Linéarité de la dérivation***

Soient $f := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$ et $g := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to g(x) \end{cases}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, ainsi que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

La fonction dérivée de la fonction $af+bg$ est :

$$(af+bg)' := \begin{cases} I \mapsto \mathbb{R} \\ x \to a\,f'(x)+b\,g'(x) \end{cases}$$

preuve :

$$\begin{aligned} \frac{(af+bg)(x+h)-(af+bg)(x)}{h} &= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-(af(x)+bg(x))}{h} \\ &= \frac{af(x+h)+bg(x+h)-af(x)-bg(x)}{h} \\ &= \frac{af(x+h)-af(x)+bg(x+h)-bg(x)}{h} \\ &= \frac{af(x+h)-af(x)}{h}+\frac{bg(x+h)-bg(x)}{h} \\ &= a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \end{aligned}$$

qui tend vers $af'(x)+bg'(x)$ quand h tend vers zéro.

Grâce aux remarques n°7 et 8 ainsi qu'aux propriétés n°2,3 et 4 nous obtenons le formulaire suivant :

V Un formulaire à connaître

Propriété n°5.

Dans ce tableau k , a , b , c et d sont des nombres.

$f(x)=$	$f'(x)=$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$a\times 3x^2 + b\times 2x + c$

Exemple n°3.

On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-5x^2+11x+7$ et déterminons l'expression de sa fonction dérivée.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\times 3x^2 - 5\times 2x + 11 \\ &= 12x^2-10x+11 \end{aligned}$$

VI Variations d'une fonction

Propriété n°6.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si f est croissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$
- Si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$
- Si f est constante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)=0$

preuve :

- Supposons que f est croissante sur I

Soit $a\in I$ et $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $a+h$ appartienne à I.

→ Si $h>0$ alors :

$a+h>a$ et comme f est croissante sur I $f(a+h)\geqslant f(a)$

Ce qui équivaut à :

$a+h-a>0$ et $f(a+h)-f(a)\geqslant 0$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\geqslant 0$

→ De la même façon, si $h<0$ alors :

$a+h<a$ et comme f est croissante sur I $f(a+h)\leqslant f(a)$

Ce qui équivaut à :

$a+h-a<0$ et $f(a+h)-f(a)\leqslant 0$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\geqslant 0$

Dans les deux cas $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\geqslant 0$, ce qui implique $f'(a)\geqslant 0$

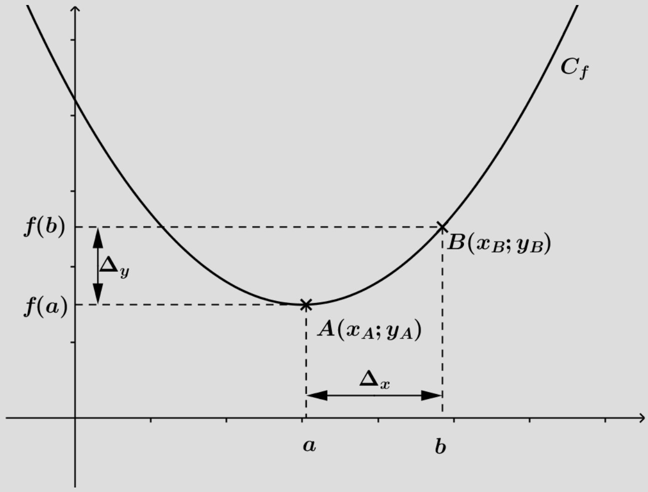
- Les deux autres points se sont démontrent de la même manière et sont laissés à titre d'exercice.

Propriété n°7. ***(admise)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$ alors f est croissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$ alors f est décroissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x)=0$ alors f est constante sur I

VII Le résumé du cours

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



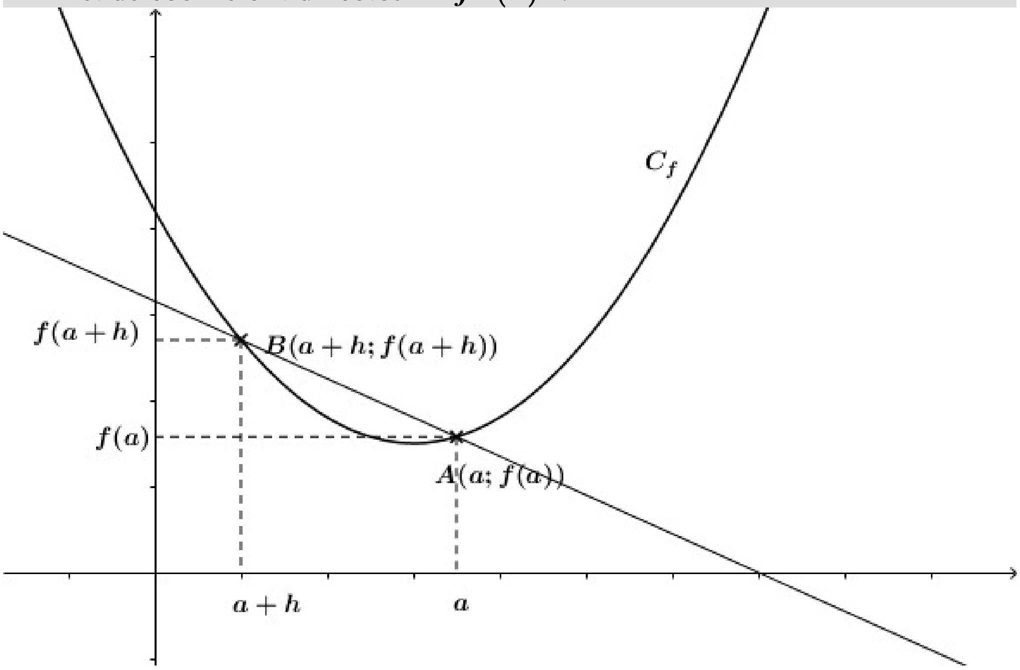
taux de variation : $\boldsymbol{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}}$

où $\Delta_y = y_B - y_A$ et $\Delta_x = x_B - x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

La **tangente** T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $\boldsymbol{f'(a)}$.

Équation de la tangente en a

$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$



Si f et g sont dérivables sur un intervalle I alors $f+g$ aussi et $\boldsymbol{(f+g)' = f'+g'}$

Si f est dérivable sur un intervalle I et si $k \in \mathbb{R}$ alors kf est dérivable sur I et $\boldsymbol{(kf)' = kf'}$

À connaître par cœur

$f(x)=$	$f'(x)=$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
ax^3+bx^2+cx+d	$a\times 3x^2 + b\times 2x + c$