SUITES NUMÉRIQUES

I Les suites numériques

Définition n°1.

Une suite **numérique** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

▪ Pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est souvent noté u_n et on l'appelle le **terme d'indice** n de la suite.

▪ La suite est notée u , ou plus souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

▪ Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0 , on note alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Exemple n°1.

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :
Pour $n \geqslant 1$, u_n est le n^ième^ nombre premier .

$u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, $u_5 = 11$ …

Définition n°2. ***Suite définie de façon explicite***

Une suite u est **définie de façon fonctionnelle ou explicite** lorsque u_n peut être calculé directement en fonction de n sans que l'on ait besoin de calculer tous les termes précédents.

Exemple n°2.

La suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :
Pour $n \geqslant 0$, $v_n = n^2 + \sqrt{n} - 4$

$v_0 = 0^2 + \sqrt{0} - 4 = -4$,…, on peut calculer directement v_{100}

$v_{100} = 100^2 + \sqrt{100} - 4 = 10000 + 10 - 4 = 10096$

Remarque n°1.

Attention, v_{100} n'est pas le 100ième terme mais le 101ième car le premier indice est zéro.

Définition n°3. ***Suite définie par récurrence***

Une suite u est **définie par récurrence** lorsqu'on :
dispose du **terme initial** et d'une **formule permettant de passer d'un terme au suivant.**

Exemple n°3.

La suite $(w_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = 2 \times w_n + n \end{cases}$

$w_1 = 2 \times w_0 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$

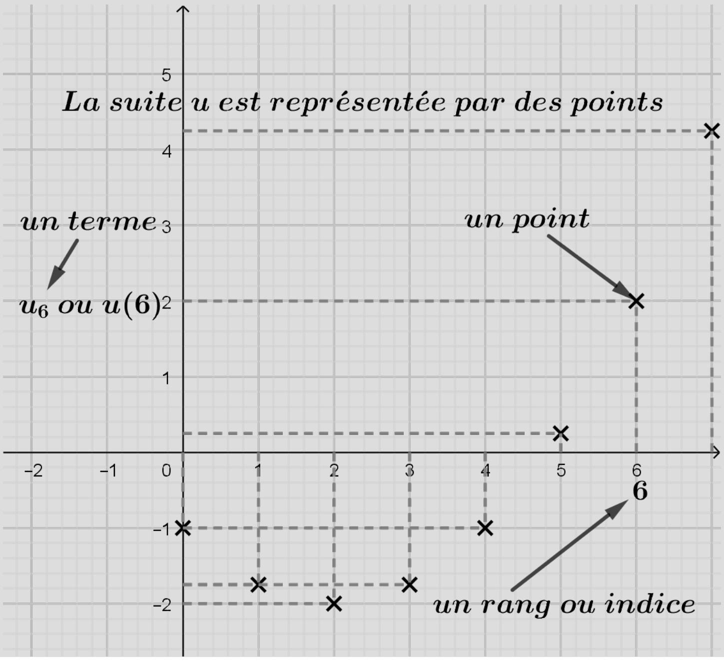
$w_2 = 2 \times w_1 + 2 = 2 \times 5 + 2 = 12$

Remarque n°2.

Si on veut calculer w_{100} alors il faut calculer w_{99} qui lui même nécessite w_{98} etc …

Méthode n°1. Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une suite u dans un repère, on place:
- les indices n sur l'axe des abscisses;
- les termes $u_n = u(n)$ sur l'axe des ordonnées ;
- les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ dans le repère, sans les relier (nuage de points).



Définition n°4. Suite croissante, suite décroissante

▪ Une suite u est dite **croissante** lorsque les termes de la liste sont classés en ordre croissant : pour tout indice n :
$u(n-1) \leqslant u(n)$ ou bien $\boldsymbol{u(n) \leqslant u(n+1)}$.

▪ Une suite u est dite **décroissante** lorsque ses termes sont classés en ordre décroissant : pour tout indice n :
$u(n-1) \geqslant u(n)$ ou bien $\boldsymbol{u(n) \geqslant u(n+1)}$.

II Les suites arithmétiques

Définition n°5. ***Suite arithmétique***

Une suite u est dite **arithmétique** si l'on **passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°4.

La suite v de terme initial $v_0=5$ et de raison $r=-3$.

$v_0=5$, $v_1 = v_0+r = 5+(-3)=2$, $v_2 = v_1+r = 2+(-3)=-1,\ldots$

Propriété n°1. ***Relation de récurrence***

Si u est une suite arithmétique de raison r , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$, $u:\begin{cases} u_0=k \\ u(n+1)=u(n)+r \end{cases}$

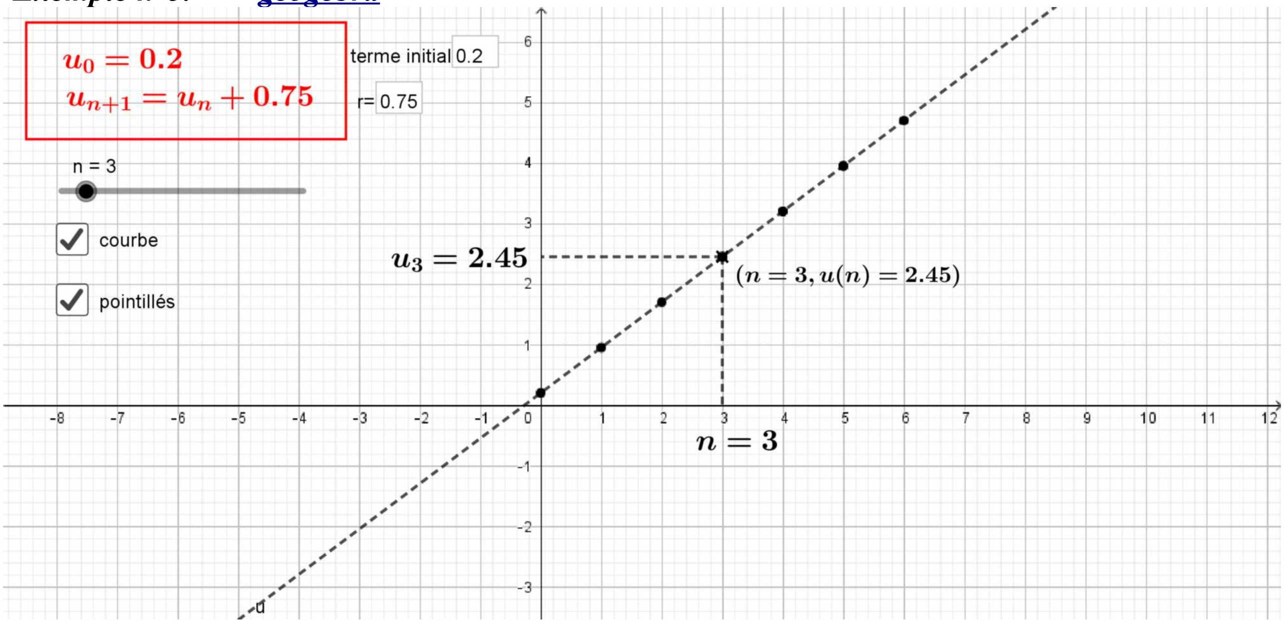
(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°2. ***Représentation graphique***

▪ Si une suite est arithmétique, elle est représentée par un nuage de points alignés.

▪ Si une suite est représentée par un nuage de points alignés, elle est arithmétique.

Exemple n°5. ***géogébra***



Propriété n°3. ***Sens de variation***

Soit u une suite arithmétique de raison r :

- si $r>0$, la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $r=0$, la suite est constante;
- si $r<0$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).

III Les suites géométriques

Définition n°6. ***Suite géométrique***

Une suite u est dite **géométrique** si l'on **passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur**, appelée la **raison** de la suite.

Exemple n°6.

La suite v de terme initial $v_0=10$ et de raison $q=0{,}5$.

$v_0=10$, $v_1 = v_0\times q = 10\times 0{,}5=5$, $v_2 = v_1\times q = 5\times 0{,}5=2{,}5,\dots$

Propriété n°4. ***Relation de récurrence***

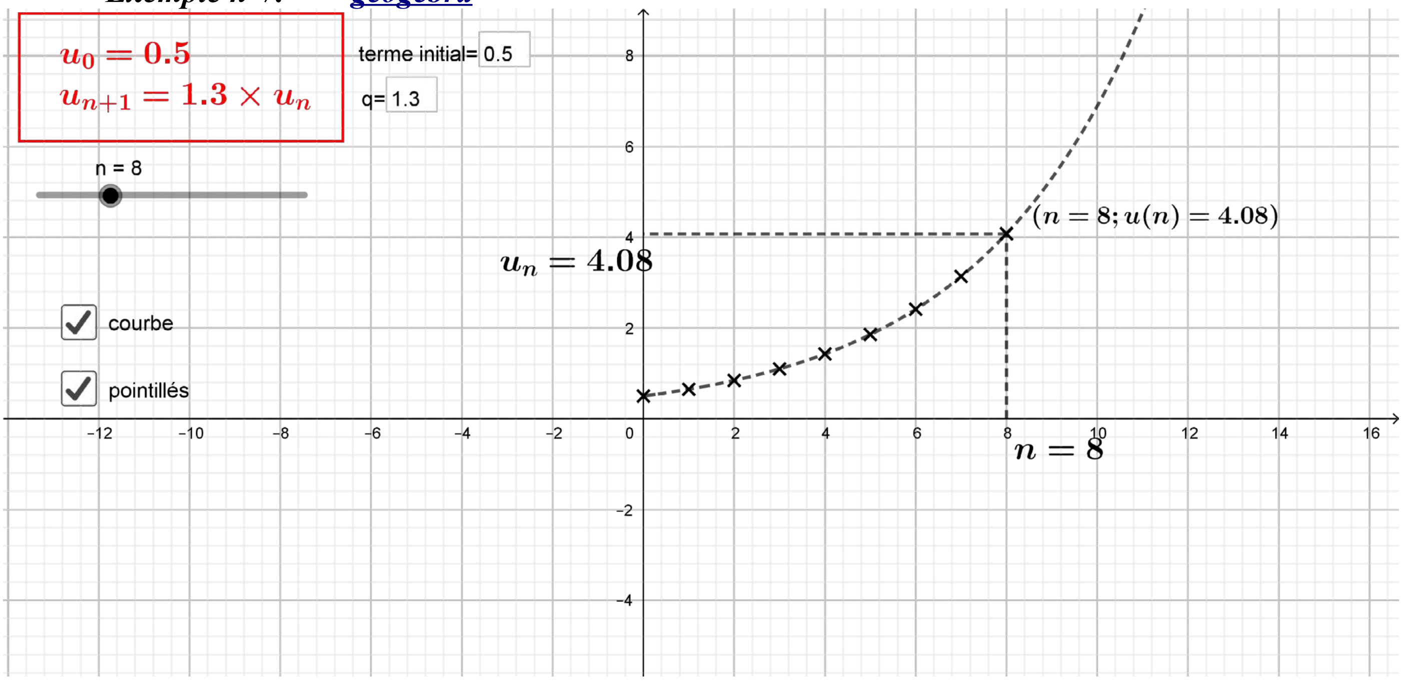
Si u est une suite géométrique de raison q , de terme initial k dont l'indice est zéro , alors : pour $n\geqslant 0$, $u:\begin{cases} u_0=k \\ u(n+1)=u(n)\times q \end{cases}$

(si l'indice de départ , n'est pas zéro, on adapte …)

Propriété n°5. ***Représentation graphique***

- Si une suite est géométrique, elle est représentée par un nuage de points exponentiel.
- Si une suite est représentée par un nuage de points exponentiel, elle est géométrique.

Exemple n°7. [***géogébra***]



Propriété n°6. ***Sens de variation***

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif :

- si $q>1$, la suite est croissante (et même strictement croissante);
- si $q=1$, la suite est constante;
- si $0<q<1$, la suite est décroissante (et même strictement décroissante).