SUITES NUMÉRIQUES M05

EXERCICE N°1

VOIR LE CORRIGÉ

Un capital de 8 000 € est placé à 2,3 % par an à intérêts composés.

On rappelle le principe du placement à intérêts composés : à la fin de chaque année, les intérêts sont intégrés à l'ancien capital et génèrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite. Ainsi on pose : $V(0) = 8\,000$.

1) Calculer le capital acquis à la fin de la 1e année puis de la 2e année.
2) Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.
3) Compléter la phrase suivante: « Augmenter quantité de 2,3 % revient à la multiplier par ... »
4) En déduire que la suite V est géométrique préciser sa raison et le premier terme.
5) Écrire une formule de récurrence permette calculer $V(n+1)$ en fonction de $V(n)$.
6) Calculer et interpréter $V(6)$.

EXERCICE N°2

VOIR LE CORRIGÉ

La population d'une ville augmente régulièrement de 8 % par an.
En 2019, elle était de 15 000 habitants.
On désigne par $u(n)$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2019+n)$. On a donc $u(0) = 15000$.

1) Calculer les termes $u(1), u(2)$ et $u(3)$.
2) Donner la nature et la raison de la suite u .
3) Écrire la relation de récurrence reliant les termes $u(n+1)$ et $u(n)$.
4) Calculer le nombre d'habitants prévus pour 2028.
5) Déterminer en quelle année la population aura doublé.
6) Soit $v(n)$ l'augmentation du nombre d'habitants constatée l'année $(2019+n)$, par rapport à l'année précédente. On a donc: $v(n)=u(n+1)-u(n)$.
6.a) Calculer $v(1), v(2)$ et $v(3)$.
6.b) Calculer la somme $v(1)+v(2)+v(3)$ et interpréter le résultat.

EXERCICE N°3

VOIR LE CORRIGÉ

Cet exercice étudie la désintégration de l'Uranium 238 (^{238}U) et son utilisation pour la datation de l'âge de la Terre.

Soit $v(0), v(1), v(n)$, le nombre d'atomes de Uranium 238 respectivement à l'instant $t = 0$; 1 dizaine de millions d'années après ; n dizaines de millions d'années après.

On sait que le nombre d'atomes de carbone Uranium 238 diminue très très lentement, d'environ 0,16 % par dizaine de millions d'années.
La datation radiométrique permet d'établir un âge absolu pour la Terre en mesurant la quantité d'isotope parent et d'isotope fille dans les échantillons.
Lorsque la désintégration radioactive se produit, l'isotope mère se transforme en un isotope fille (le produit de désintégration). La quantité d'isotope mère diminue avec le temps, tandis que la quantité d'isotope fille augmente. En mesurant la quantité d'isotope mère et d'isotope fille dans un échantillon, les scientifiques peuvent calculer l'âge de l'échantillon.

1) Quelle est la nature (arithmétique ou géométrique) de la suite v ? Préciser sa raison.

2) Après plusieurs mesures, les scientifiques ont calculé qu'un échantillon contient en moyenne 48,34 % d'Uranium 238. Justifiez que l'âge de la terre est d'environ 4,54 milliards d'années.

SUITES NUMÉRIQUES M05C

EXERCICE N°1 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE 1

Un capital de 8 000 € est placé à 2,3 % par an à intérêts composés.

> On rappelle le principe du placement à intérêts composés : à la fin de chaque année, les intérêts sont intégrés à l'ancien capital et génèrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite. Ainsi on pose : $V(0) = 8\,000$.

1) Calculer le capital acquis à la fin de la 1e année puis de la 2e année.

Il s'agit de calculer $V(1)$ et $V(2)$.

$$V(1) = V(0)+\frac{2,3}{100}\times V(0) = 8000+\frac{2,3}{100}\times 8000 \text{ , ainsi } \boxed{V(1)=8\,184}$$

$$V(2) = V(1)+\frac{2,3}{100}\times V(1) = 8184+\frac{2,3}{100}\times 8184 \text{ , ainsi } \boxed{V(2)=8372,23}$$

Le capital acquis à la fin de la $\boxed{1^{ere}\text{ année vaut : } 8184\text{ €}}$

et celui acquis à la fin de la $\boxed{2^{eme}\text{ année vaut : } 8372,23\text{ €}}$

2) Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.

D'une part : $V(2)-V(1) = 8372,23-8184 = 128,23$

et d'autre part : $V(1)-V(0) = 8184-8000 = 184$

Ainsi $\boxed{\text{les différences entre deux termes successifs ne sont pas toutes égales}}$, ce qui prouve que le capital n'est pas en progression arithmétique.

3) Compléter la phrase suivante: « Augmenter quantité de 2,3 % revient à la multiplier par ... »

Augmenter une quantité de 2,3 % revient à la multiplier par $\boxed{1,023}$

4) En déduire que la suite V est géométrique préciser sa raison et le premier terme.

Pour passer d'un terme au suivant, on $\boxed{\text{multiplie à chaque fois par le même nombre}}$: 1,023.

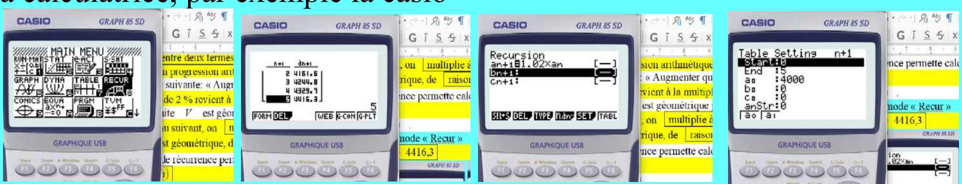
On en déduit que V est géométrique, de $\boxed{\text{raison } q=1,023}$ et de $\boxed{1^{er}\text{ terme } V(0)=8000}$

5) Écrire une formule de récurrence permette calculer $V(n+1)$ en fonction de $V(n)$.

$\boxed{V(n+1) = 1,023\times V(n)}$

6) Calculer et interpréter $V(5)$.

On utilise la calculatrice, par exemple la casio



À l'aide la calculatrice : $\boxed{V(5) \approx 8963,3}$

$\boxed{\text{Le capital acquis à la fin de la } 5^{eme}\text{ année vaut environ } 8963,3\text{ €}}$.

EXERCICE N°2 *(Le corrigé)*

RETOUR À L'EXERCICE 2

La population d'une ville augmente régulièrement de 8 % par an.
En 2019, elle était de 15 000 habitants.
On désigne par $u(n)$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2019+n)$. On a donc $u(0) = 15000$.

1) Calculer les termes $u(1), u(2)$ et $u(3)$.

Une augmentation de 8 % correspond à un Coefficient Multiplicateur $CM = 1{,}08$

$u(1) = u(0)\times 1{,}08 = 15000\times 1{,}08$, ainsi $\boxed{u(1) = 16200}$

$u(2) = u(1)\times 1{,}08 = 16200\times 1{,}08$, ainsi $\boxed{u(2) = 17496}$

$u(3) = u(2)\times 1{,}08 = 17496\times 1{,}08$, ainsi $\boxed{u(3) \approx 18895}$

2) Donner la nature et la raison de la suite u.

Pour passer d'un terme au suivant, on $\boxed{\text{multiplie à chaque fois par le même nombre}}$: 1,08.
On en déduit que $\boxed{u \text{ est géométrique}}$, de $\boxed{\text{raison } q=1{,}08}$ et de $\boxed{1^{\text{er}} \text{ terme } u(0)=15000}$

3) Écrire la relation de récurrence reliant les termes $u(n+1)$ et $u(n)$.

$\boxed{u(n+1) = 1{,}08\times u(n)}$

4) Calculer le nombre d'habitants prévus pour 2026.

$2026 = 2019+9$, il s'agît donc de calculer $u(9)$.
à l'aide de la calculatrice $\boxed{u(9) \approx 29985}$

5) Déterminer en quelle année la population aura doublé.

à l'aide de la calculatrice $u(9) \approx 29985$ et $u(10) \approx 32383$
On en déduit que la population aura doublé en $2019+10=$ $\boxed{2029}$

6) Soit $v(n)$ l'augmentation du nombre d'habitants constatée l'année $(2019+n)$, par rapport à l'année précédente. On a donc: $v(n)=u(n+1)-u(n)$.

6.a) Calculer $v(1), v(2)$ et $v(3)$.

$v(1) = u(1+1)-u(1) = u(2)-(1) = 17496-16200$, ainsi $\boxed{v(1) = 1296}$

$v(2) = u(2+1)-u(2) = u(3)-(2) = 18895-17496$, ainsi $\boxed{v(2) = 1399}$

$v(3) = u(3+1)-u(3) = u(4)-(3) = 20407-18895$, ainsi $\boxed{v(3) = 1512}$

6.b) Calculer la somme: $v(1)+v(2)+v(3)$ et interpréter le résultat.

$v(1)+v(2)+v(3) = 1296+1399+1512 =$ $\boxed{4207}$
De $\boxed{2020 \text{ à } 2023 \text{ la ville a gagné } 4207 \text{ habitants}}$.

EXERCICE N°3 *(Le corrigé)*

RETOUR À L'EXERCICE 3

Cet exercice étudie la désintégration de l'Uranium 238 (^{238}U) et son utilisation pour la datation de l'âge de la Terre.

Soit $v(0), v(1), v(n)$, le nombre d'atomes de Uranium 238 respectivement à l'instant $t = 0$; 1 dizaine de millions d'années après ; n dizaines de millions d'années après.

On sait que le nombre d'atomes de carbone Uranium 238 diminue très très lentement, d'environ 0,16 % par dizaine de millions d'années.
La datation radiométrique permet d'établir un âge absolu pour la Terre en mesurant la quantité d'isotope parent et d'isotope fille dans les échantillons.
Lorsque la désintégration radioactive se produit, l'isotope mère se transforme en un isotope fille (le produit de désintégration). La quantité d'isotope mère diminue avec le temps, tandis que la quantité d'isotope fille augmente. En mesurant la quantité d'isotope mère et d'isotope fille dans un échantillon, les scientifiques peuvent calculer l'âge de l'échantillon.

1) Quelle est la nature (arithmétique ou géométrique) de la suite v ? Préciser sa raison.

Une diminution de $0{,}16\,\%$ correspond à un coefficient multiplicatif $CM = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$.

Ainsi pour passer d'un terme au suivant on multiplie à chaque fois par $0{,}9984$.

Donc la suite $\boxed{v \text{ est géométrique}}$ et de $\boxed{\text{raison } q = 0{,}9984}$.

2) Après plusieurs mesures, les scientifiques ont calculé qu'un échantillon contient en moyenne 48,34 % d'Uranium 238. Justifiez que l'âge de la terre est d'environ 4,54 milliards d'années.

Ici, contrairement à d'habitude, on ne connaît aucun terme de la suite. Mais ce n'est pas un problème puisque l'on va raisonner en terme de proportion et non de quantité.

4,54 milliards d'années correspondent à 454 dizaines de millions d'années.

Or :

$$v(454) = 0{,}9984 \times v(453) = 0{,}9984^2 \times v(452) = 0{,}9984^3 \times v(451) = \ldots = 0{,}9984^{454} \times v(0)$$

Ainsi $v(454) \approx 0{,}4834 \times v(0) = \dfrac{48{,}34}{100} \times v(0)$

Autrement dit, $\boxed{v(454) \text{ représente } 48{,}34\,\% \text{ de } v(0)}$

On peut donc conclure que l'âge de la terre est de 454 dizaines de millions d'années soit 4,54 milliards d'années.