LES FONCTIONS PART1

I Les généralités

I.1 Définir une fonction

Définition n°1. Domaine de définition, image, antécédent

On considère D_f un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- On définit une fonction sur D_f en associant à chaque nombre réel x de D_f un unique réel appelé image de x par f qui est noté $f(x)$.
- On dit que D_f est le domaine de définition de f :
  Si $x \notin D_f$ alors $f(x)$ n'existe pas.
- Si, pour un nombre réel b , il existe $a \in D_f$ tel que $f(a)=b$ alors on dit que a est un antécédent de b par f .

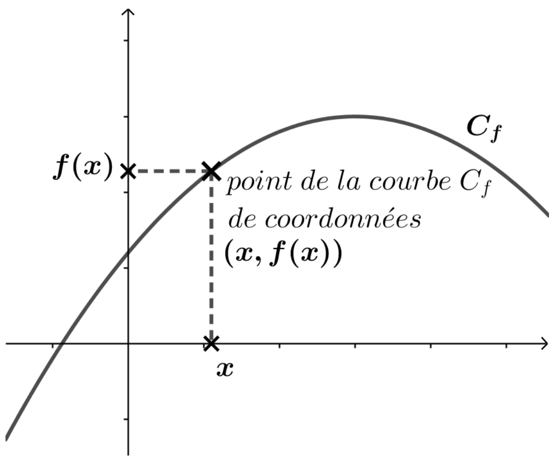
Exemple n°1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout x réel associe le nombre $2x-5$. On écrit symboliquement en mathématiques $f : x \mapsto 2x-5$

I.2 La représentation graphique

Définition n°2. Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f .
On appelle courbe représentative de la fonction f (notée C_f) dans un repère du plan, l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ où $x \in D$ et $y=f(x)$.



II Fonctions polynômes de degré 2

II.1 Définition

Définition n°3.

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
L'expression algébrique ax^2+bx+c est appelée trinôme du second degré.

Exemple n°2.

$f : x \mapsto x^2-2x-3$ est une fonction polynôme du second degré et son expression est $f(x)=x^2-2x-3$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$.

II.2 Courbe représentative

On considère une fonction polynôme du second degré écrite sous sa forme développée : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

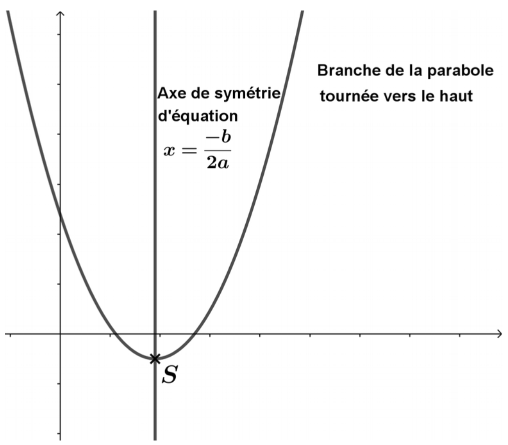
Définition n°4.

Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction f du second degré s'appelle une parabole.
▪ Lorsque $a>0$, on dit que la parabole est tournée vers le haut.
▪ Lorsque $a<0$, on dit que la parabole est tournée vers le bas.

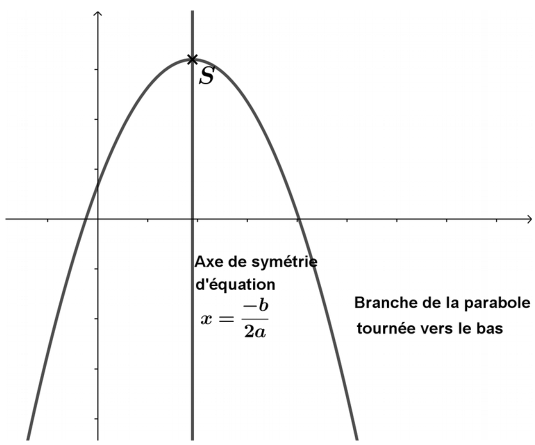
Propriété n°1. (admise)

▪ Le sommet de la parabole est le point $S(\alpha\ ;\ \beta)$
avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$
▪ La parabole admet un axe de symétrie d'équation $x=\frac{-b}{2a}$.

$a>0$



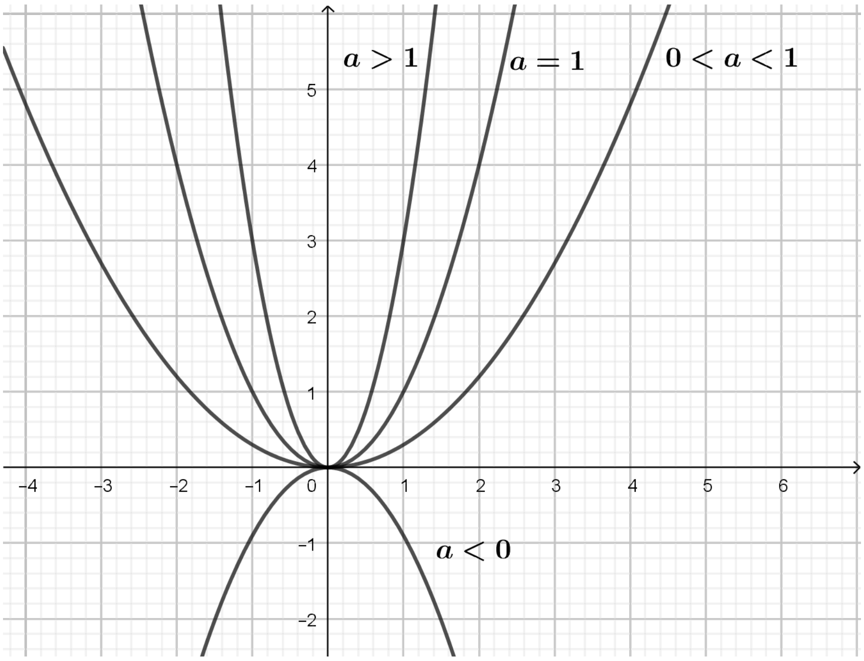
$a<0$



[Géogébra]

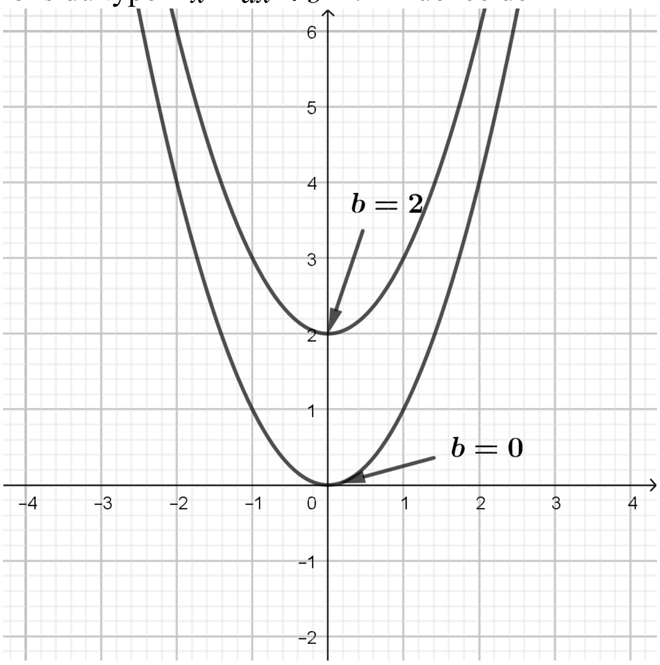
II.3 Quelques cas particuliers

Pour les fonctions du type $x \mapsto ax^2$: Influence de a



geogebra

Pour les fonctions du type $x \mapsto ax^2 + b$: Influence de b



II.4 Les racines quand elles existent

Propriété n°2. ***(admise)***

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ (appelée forme développée)

- Si f admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues) alors $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ que l'on appelle forme factorisée de f .
- Inversement, si f s'écrit sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, alors x_1 et x_2 sont les racines de f .
- L'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f a alors pour équation $x=\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$
- L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

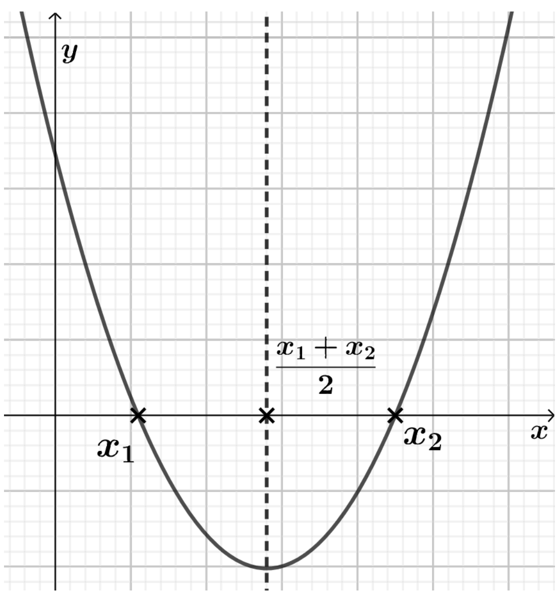
Exemple n°3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-9x-30$.
On peut montrer que $f(-2)=f(5)=0$. -2 et 5 sont les racines de f On peut lire sur la forme développée que $a=3$.
La forme factorisée est donc $f(x)=3(x-(-2))(x-5)$, soit $f(x)=3(x+2)(x-5)$.

II.5 Courbe représentative quand les racines sont distinctes

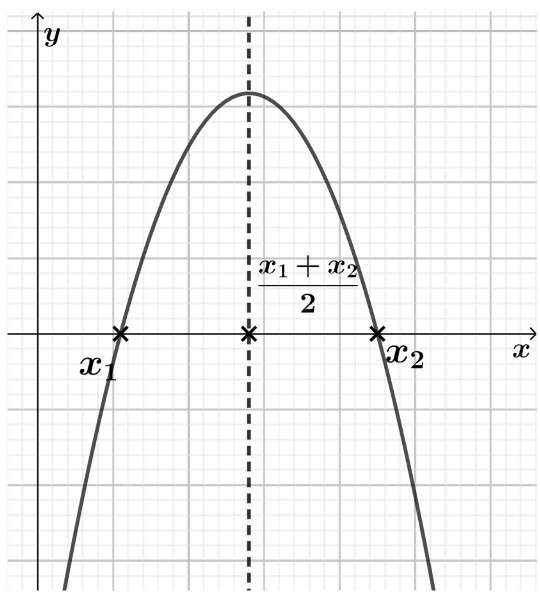
On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ et on la représente dans un repère du plan :

$a>0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a<0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les racines x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
Si les racines sont distinctes, alors $f(x)$ est toujours du signe de a sauf entre les racines.