LES FONCTIONS PART1 M03

EXERCICE N°1

VOIR LE CORRIGÉ

Les fonctions polynômes définie sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $A(x)=\left(\frac{2}{3}x+7\right)(x-6)$ et $B(x)=\frac{2}{3}x^2+11x-42$ sont-elles égales ?

EXERCICE N°2

VOIR LE CORRIGÉ

Déterminer le réel a pour que les fonctions polynômes définie sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $C(x)=(4x-3)(x+a)$ et $D(x)=4x^2+5x-6$ soient égales.

EXERCICE N°3

VOIR LE CORRIGÉ

Pour chacune des fonctions polynômes suivantes, déterminer les coordonnées du sommet, l'équation de l'axe de symétrie ainsi que l'orientation de la parabole.

1) $f(x)=x^2-6x+5$ **2)** $g(x)=-7x^2+14x-3$

3) $i(x)=5(x-2)^2+3$

EXERCICE N°4 Python

VOIR LE CORRIGÉ

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$.
Sa courbe représentative est une parabole C_f.

1) Écrire, en langage Python, une fonction qui prend en entrée les valeurs de a, b et c, et qui renvoie les coordonnées du sommet de cette parabole.

2) Utiliser cette fonction pour déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentant la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2+8x-9$

3) Quel est le signe de l'ordonnée de S ? Étant donné l'orientation de la parabole, combien de fois celle-ci va-t-elle couper l'axe des abscisses ?

EXERCICE N°5

VOIR LE CORRIGÉ

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2+9x-12$.

1) Vérifier que $f(x) = 3(x+4)(x-1)$.

2) Trouver quelques caractéristiques (racines, coordonnées de sommet, équation de l'axe de symétrie) de la fonction f puis tracer l'allure générale de sa courbe représentative dans rapportée à un repère.

EXERCICE N°6

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1) $-7x^2-5x=0$ **2)** $(x+5)(2x-11)=0$ **3)** $4x(x-9)=0$

EXERCICE N°7

VOIR LE CORRIGÉ

Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x) = 3x^2-3x-6$.
Déterminer la forme factorisée de f en connaissant une de ses racines, le nombre 2.

EXERCICE N°8

VOIR LE CORRIGÉ

Soit f une fonction polynôme du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2-27$.

1) Déterminer $f(-3)$.

2) Factoriser f.

3) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

LES FONCTIONS PART1 M03C

EXERCICE N°1 *(Le corrigé)*

RETOUR À L'EXERCICE 1

Les fonctions polynômes définie sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $A(x)=\left(\frac{2}{3}x+7\right)(x-6)$ et $B(x)=\frac{2}{3}x^2+11x-42$ sont-elles égales ?

On remarque que $A(x)$ est sous forme factorisée et $B(x)$ sous forme développée réduite.
Le plus simple est de développer $A(x)$ afin de vérifier que l'on « retombe bien » sur $B(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A(x) &= \left(\frac{2}{3}x+7\right)(x-6) \\ &= \frac{2}{3}x^2-4x+7x-42 \\ &= \frac{2}{3}x^2+3x-42 \end{aligned}$$

On constate que $A(x)$ et $B(x)$ n'ont pas la forme développée réduite. $\boxed{\text{Elles ne sont pas égales}}$.

Ce n'est bien sûr pas la seule façon de procèder. En voici deux autres :

1) Si on est persuadé que les expressions ne sont pas égales, on peut exhiber une valeur de x pour laquelle $A(x)$ et $B(x)$ sont différents.

Pour $x = 1$

On a d'une part :

$$A(1) = \left(\frac{2}{3}\times1+7\right)(1-6) = -\frac{115}{3}$$

Et d'autre part :

$$B(1) = \frac{2}{3}\times1^2+11\times1-42 = -\frac{91}{3}$$

On en déduit que les expresions ne sont pas égales. (Si elles l'étaient, on aurait le même résultat pour toutes les valeurs possibles de x)

2) On étudie la différence des deux expressions.

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A(x)-B(x) &= \left(\frac{2}{3}x+7\right)(x-6)-\left[\frac{2}{3}x^2+11x-42\right] \\ &= \frac{2}{3}x^2+3x-42-\frac{2}{3}x^2-11x+42 \\ &= -8x \end{aligned}$$

La diffèrence des ces deux expressions n'étant pas nulle pout tout réel x, on en déduit qu'elle ne sont pas égales.

EXERCICE N°2 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 2

Déterminer le réel a pour que les fonctions polynômes définie sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $C(x)=(4x-3)(x+a)$ et $D(x)=4x^2+5x-6$ soient égales.

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(x) &= (4x-3)(x+a) \\ &= 4x^2+4ax-3x-3a \\ &= 4x^2+(4a-3)x-3a \end{aligned}$$

Par identification :

Cela veut dire que les coefficients de x^2 et de x ainsi que les constantes doivent se correspondre : $4x^2$ et $4x^2$: OK , $(4a-3)x$ et $5x$ nous oblige à avoir $4a-3=5$ et $-3a$ et -6 nous oblige à avoir $-3a=-6$

$$\begin{cases} 4a-3 = 5 \\ -3a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 8 \\ a = \dfrac{-6}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si on avait pas obtenu la même valeur pour a alors il n'y aurait pas eu de solution.

On en déduit que pour ces deux fonctions polynômes soient égales, il faut et il suffit que $\boxed{a = 2}$

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 3

Pour chacune des fonctions polynômes suivantes, déterminer les coordonnées du sommet, l'équation de l'axe de symétrie ainsi que l'orientation de la parabole.

1) $f(x)=x^2-6x+5$ **2)** $g(x)=-7x^2+14x-3$

3) $i(x)=5(x-2)^2+3$

1) Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme ax^2+bx+c
avec $a = 1$; $b = -6$ et $c = 5$.
C'est donc une fonction trinôme qui est par conséquent représentée par une parabole...
En notant $S(\alpha\ ;\ \beta)$ le sommet de la parabole représentant f , on peut écrire :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 1} = 3$$

et $\beta = f(\alpha) = 3^2-6\times 3+5 = -4$
On en déduit que :

- $\boxed{S(3\ ;-4)}$
- L'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = 3}$

Souvenez-vous, l'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$

- De plus $a = 1 > 0$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le haut.

Attention à ne pas confondre α qui se lit : alpha avec x qui se lit : ... x et a qui se lit...a

2) Pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x)$ est de la forme ax^2+bx+c
avec $a = -7$; $b = 14$ et $c = -3$.
En notant $S(\alpha\ ;\ \beta)$ le sommet de la parabole représentant f , on peut écrire :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{2\times(-7)} = 1$$

et $\beta = g(\alpha) = -7\times 1^2+14\times 1-3 = 4$
On en déduit que :

- $\boxed{S(1\ ;\ 4)}$
- L'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = 1}$
- De plus $a = -7 < 0$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

3) Pour $x\in\mathbb{R}$,
Ici, on a une étape en plus car $i(x)$ n'est pas sous forme développée réduite, on commence donc pour écrire la « bonne » forme.
Remarque au lecteur éventuel d'une autre formation : La forme canonique n'étant pas au programme, on ne l'utilise pas ici...

$i(x) = 5(x-2)^2+3 = 5x^2-20x+23$
ainsi,
$i(x)$ est de la forme ax^2+bx+c
avec $a = 5$; $b = -20$ et $c = 23$.
En notant $S(\alpha\ ;\ \beta)$ le sommet de la parabole représentant f , on peut écrire :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2\times 5} = 2$$

et $\beta = i(\alpha) = 5(2-2)^2+3 = 3$
On en déduit que :

- $\boxed{S(2\ ;\ 3)}$
- L'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = 1}$
- De plus $a = -7 < 0$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

EXERCICE N°4 Python (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 4

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$.
Sa courbe représentative est une parabole C_f .

1) Écrire, en langage Python, une fonction qui prend en entrée les valeurs de a, b et c , et qui renvoie les coordonnées du sommet de cette parabole.

```
def sommet(a,b,c):
    alpha = -b/(2*a)
    beta = a*alpha**2+b*alpha+c
    return (alpha,beta)
```

2) Utiliser cette fonction pour déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentant la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2+8x-9$

```
>>> sommet(4,8,-9)
(-1.0, -13.0)
>>>
```

3) Quel est le signe de l'ordonnée de S ? Étant donné l'orientation de la parabole, combien de fois celle-ci va-t-elle couper l'axe des abscisses ?

L'ordonnée de S est négative donc le point S se situe sous l'axe des abscisses.
De plus $a = 4 > 0$ donc les branches la parabole sont tournées vers le haut.
On en déduit que la courbe coupera deux fois l'axe des abscisses .
Une fois pour « descendre » jusque S et une seconde fois pour « remonter ».

EXERCICE N°5 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE 5

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2+9x-12$.

1) Vérifier que $f(x) = 3(x+4)(x-1)$.

Ici, « l'astuce » est toujours la même, on part de la forme factorisée, on développe, on réduit et on « retombe » sur l'expression de $f(x)$.

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & 3(x+4)(x-1) \\ = \; & 3[x^2-x+4x-4] \\ = \; & 3(x^2+3x-4) \\ = \; & 3x^2+9x-12 \\ = \; & f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $f(x) = 3(x+4)(x-1)$

Attention, il est important de ne pas commencer par « $f(x) = 3(x+4)(x-1)$ » car on ne peut pas commencer par affirmer ce que l'on veut démontrer.

2) Trouver quelques caractéristiques (racines, coordonnées de sommet, équation de l'axe de symétrie) de la fonction f puis tracer l'allure générale de sa courbe représentative dans rapportée à un repère.

- La forme factorisée nous donne les racines : -4 et 1
- La forme développée réduite est de la forme ax^2+bx+c

avec $a = 3$; $b = 9$ et $c = -12$.

En notant $S(\alpha\ ;\ \beta)$ le sommet de la parabole représentant f , on peut écrire :

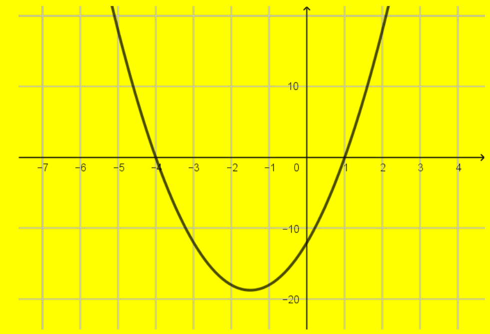
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2\times 3} = -1{,}5$$

et

$$\beta = f(\alpha) = 3\times(-1{,}5)^2+9\times(-1{,}5)-12 = -18{,}75$$

On en déduit que :

- $\boxed{S(1{,}5\ ;\ -18{,}75)}$
- L'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = -1{,}5}$
- De plus $a = 3 >$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas.



EXERCICE N°6 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1) $-7x^2-5x=0$ **2)** $(x+5)(2x-11)=0$ **3)** $4x(x-9)=0$

1) Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$-7x^2-5x = 0$

$x(-7x-5) = 0$

Souvenez-vous : un produit de facteurs est nul ssi l'un au moins de ses facteurs est nul.

$(x = 0 \quad \text{ou} \quad -7x-5 = 0)$

$\left(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{7}\right)$

On en déduit que $\boxed{S = \left\{-\frac{5}{7}\ ;\ 0\right\}}$

Vous pouvez aussi écrire :

« On en déduit que cette équation admet $\boxed{\text{deux solutions : } -\frac{5}{7} \text{ et } 0}$.»

2) Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$(x+5)(2x-11)=0$

$(x+5 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x-11 = 0)$

$(x = -5 \quad \text{ou} \quad x = 5{,}5)$

On en déduit que $\boxed{S = \{-5\ ;\ 5{,}5\}}$

3) Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Les assertions suivantes sont équivalentes.

$x \in S$

$4x(x-9)=0$

$(4x = 0 \quad \text{ou} \quad x-9 = 0)$

$(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 9)$

On en déduit que $\boxed{S = \{0\ ;\ 9\}}$

EXERCICE N°7 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 7

Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x) = 3x^2-3x-6$.
Déterminer la forme factorisée de f en connaissant une de ses racines, le nombre 2 .

On sait que $f(x)$ admet comme forme factorisée $3(x-x_1)(x-2)$
où x_1 est l'autre racine de f .

On relit le cours : $a(x-x_1)(x-x_2)$ a est le coefficient du x^2 et x_1 et x_2 sont les racines.

$f(x) = \mathbf{3}x^2-3x-6$ donne $a = 3$

l'une des racines vaut 2, on choisit ici de remplacer x_2 par 2 (on aurait pu choisir x_1)

Or :

$$\begin{aligned} 3(x-x_1)(x-2) &= 3[x^2-2x-x_1x+2x_1] \\ &= 3[x^2+(-x_1-2)x+2x_1] \\ &= 3x^2+3(-x_1-2)x+6x_1 \end{aligned}$$

Attention, à ne pas vous mélanger les pinceaux avec x^2 ; x et x_1

Par identification,

$$\begin{cases} 3(-x_1-2) = -3 \\ 6x_1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1-2 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

Ainsi, on peut écrire, pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = 3(x+1)(x-2)}$$

EXERCICE N°8 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE 8

Soit f une fonction polynôme du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2-27$.

1) Déterminer $f(-3)$.

$f(-3) = 3\times(-3)^2-27$

$\boxed{f(-3) = 0}$

2) Factoriser f .

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2-27 \\ &= 3(x^2-9) \\ &= 3(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = 3(x+3)(x-3)$

3) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

On peut écrire $f(x)$ sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$a = 3$; $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$

On sait que $f(x)$ est sur signe de $-a$ entre les racines.

Donc $f(x)$ est négatif sur $[-3; 3]$ et positif ailleurs.