CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M04

EXERCICE N°1 Déterminer un lieu

VOIR LE CORRIGÉ

On considère deux points : C et D tels que $CD = 20$ et I le milieu du segment $[CD]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = -19$.

EXERCICE N°2 Déterminer un lieu

VOIR LE CORRIGÉ

On considère deux points : C et V tels que $CV = 12$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MV} = 4$.

EXERCICE N°3 Déterminer un lieu ou deux ?

VOIR LE CORRIGÉ

On considère un segment $[AB]$ de longueur 2 et de milieu le point I.

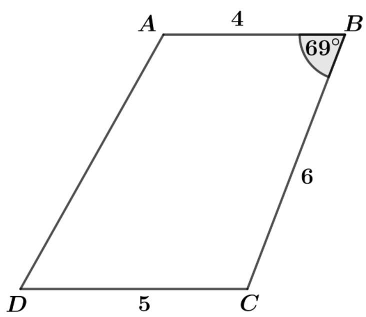
1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$.
2) Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI.
3) En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10$.
4) Comparer les deux ensembles obtenus.

EXERCICE N°4 Produit scalaire dans un quadrilatère

VOIR LE CORRIGÉ

(Calculatrice autorisée à partir de la question 3)

On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que : $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$, $\widehat{ABC} = 69°$ et (AB) et (CD) parallèles.



1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2) Calculer la longueur AC.
3) Calculer une valeur en degrés, arrondie à l'unité, de l'angle $\widehat{ACD}$.

EXERCICE N°5

VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(7\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ 4)$ et $C(-3\ ;\ -2)$. Le point A' est le milieu du segment $[BC]$ et H est le projeté orthogonal de A' sur le côté $[AC]$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
3) Donner les coordonnées de A' et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC}$.
4) En déduire la longueur AH et vérifier que les coordonnées de H sont $(-2\ ;\ -2)$.
5) On appelle I le milieu du segment $[A'H]$. Démontrer que (AI) et (BH) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°1 Déterminer un lieu

RETOUR À L'EXERCICE

On considère deux points : C et D tels que $CD = 20$ et I le milieu du segment $[CD]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = -19$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IC}\right)\\ &= MI^2 - IC^2\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$MI^2 = -19 + IC^2 = -19 + \left(\frac{20}{2}\right)^2 = -19 + 10^2 = 81$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\text{le cercle de centre } I \text{ le milieu de } [CD] \text{ et de rayon } 9}$.

Oui je sais, on peut utiliser directement la formule du cours :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 - IC^2 = -19$$

ce qui équivaut à

$$MI^2 = -19 + IC^2 = -19 + \left(\frac{20}{2}\right)^2 = -19 + 10^2 = 81$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\text{le cercle de centre } I \text{ le milieu de } [CD] \text{ et de rayon } 9}$.

Mais c'est un bon entraînement ...

EXERCICE N°2 Déterminer un lieu

RETOUR À L'EXERCICE

On considère deux points : C et V tels que $CV = 12$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MV} = 4$.

Soit M un point du plan alors,
$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MV} = -\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MV}$
Donc :
$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MV} = -4$
Notons I le milieu de $[CV]$ et soit M un point du plan alors, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MV} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IV}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IC}\right)\\ &= MI^2-IC^2\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MV} = 4 \Leftrightarrow \left(MI^2 = -4+IC^2 = -4 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = -4+36 = 32\right)$$

Comme MI est une longueur, ceci qui équivaut à :
$MI = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\text{le cercle de centre } I \text{ le milieu de } [CV] \text{ et de rayon } 4\sqrt{2}}$.

$\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{16}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

EXERCICE N°3 Déterminer un lieu ou deux ? RETOUR À L'EXERCICE

On considère un segment $[AB]$ de longueur 2 et de milieu le point I.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 3$.

Soit M un plan du plan,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 3 \Leftrightarrow MI^2 = 3 + IA^2$$
$$\Leftrightarrow MI^2 = 3+\left(\frac{2}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow MI^2 = 4$$

Ce qui équivaut, $MI = 2$, car MI est une longueur.

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\text{le cercle de centre I et de rayon 2}}$.

2) Exprimer MA^2+MB^2 en fonction de MI .

Soit M un plan du plan,

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2 &= \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2\\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2\\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2 && (I \text{ milieu de} [AB])\\ &= MI^2+IA^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + MI^2+IA^2-2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}\\ &= 2\,MI^2+2\,IA^2 && (\text{en fonction de } MI\text{, pas de } MI \text{ et } IA\ldots)\\ &= 2\,MI^2+2\times 1\\ &= 2\,MI^2+2\end{aligned}$$

3) En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2 = 10$.

Soit M un plan du plan,

$$MA^2+MB^2 = 10 \Leftrightarrow 2\,MI^2+2 = 10$$
$$\Leftrightarrow MI^2 = 4$$

Ce qui équivaut, $MI = 2$, car MI est une longueur.

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\text{le cercle de centre } I \text{ et de rayon 2}}$.

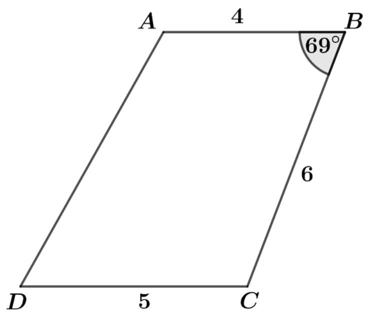
4) Comparer les deux ensembles obtenus.

$\boxed{\text{Les deux ensembles sont égaux}}$.

EXERCICE N°4 Produit scalaire dans un quadrilatère RETOUR À L'EXERCICE

(Calculatrice autorisée à partir de la question 3)

On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que : $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$, $\widehat{ABC} = 69°$ et (AB) et (CD) parallèles.



1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2) Calculer la longueur AC .
3) Calculer une valeur en degrés, arrondie à l'unité, de l'angle $\widehat{ACD}$.

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos(69°) = 4\times6\times\cos(69°) = 24\cos(69°)$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 24\cos(69°)}$$

2) Calculer la longueur AC .

D'après le théorème d'Al Khasi dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2+BC-2\,AB\times BC\times\cos(69°)\\ &= 4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos(69°)\\ &= 52-48\cos(69°)\end{aligned}$$

Ainsi, puisque AC est une longueur :

$$\boxed{AC = \sqrt{52-48\cos(69°)}}$$

Hé mais est-ce qu'on est sûr que $52-48\cos(69°)$ est positif ? Parce que sans la calculatrice...
Bah oui $0 < \cos(69) < 1$ d'où $0 < 48\cos(69) < 48$ puis $52 > 52-48\cos(69) > 4$
Donc pas besoin de calculatrice…

3) Calculer une valeur en degrés, arrondie à l'unité, de l'angle $\widehat{ACD}$.

▪ Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et coupées par la droite (AC) .
On en déduit que les angles alternes-internes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ ainsi formés ont la même mesure.
Nous allons donc déterminer la mesure de $\widehat{BAC}$ pour en déduire celle de $\widehat{ACD}$.

▪ D'une part :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$$

▪ D'autre part :

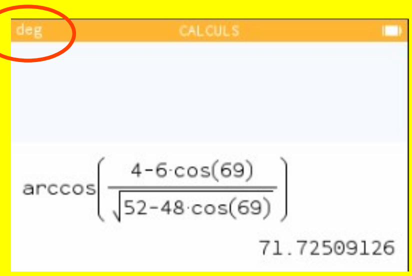
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\ &= -[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}]\\ &= -[-AB^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}]\\ &= AB^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= 4^2-24\cos(69°)\\ &= 16-24\cos(69°)\end{aligned}$$

▪ On déduit des deux points précédents que :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{16-24\cos(69°)}{4\sqrt{52-48\cos(69°)}} = \frac{4-6\cos(69°)}{\sqrt{52-48\cos(69°)}}$$

et donc que :

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{4-6\cos(69°)}{\sqrt{52-48\cos(69°)}}\right) \approx 72°$$



Ainsi,

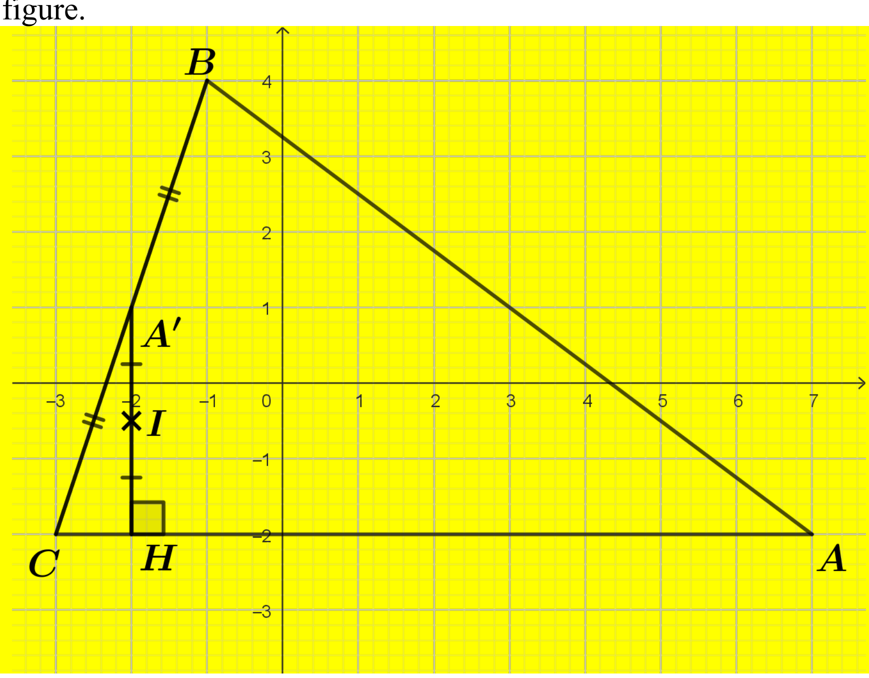
$$\boxed{\widehat{ACD} = \arccos\left(\frac{4-6\cos(69°)}{\sqrt{52-48\cos(69°)}}\right) \approx 72°}$$

EXERCICE N°5

RETOUR À L'EXERCICE

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(7\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ 4)$ et $C(-3\ ;\ -2)$. Le point A' est le milieu du segment $[BC]$ et H est le projeté orthogonal de A' sur le côté $[AC]$.

1) Faire une figure.



2) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-7)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

et

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-3-7)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{(-10)^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$$

Ainsi : $AB = AC$, ce qui prouve que le triangle ABC est isocèle en A.

3) Donner les coordonnées de A' et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Par lecture graphique ou en calculant les coordonnées du milieu de $[BC]$ …

▪ On a $\boxed{A'(-2\ ;\ 1)}$

▪ On a également :

$$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} -2-7 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3-7 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme le repère est orthonormé :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = -9 \times (-10) + 3 \times 0 = 90$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = 90}$

4) En déduire la longueur AH et vérifier que les coordonnées de H sont $(-2\ ;\ -2)$.

▪ On sait que le point H est le projeté orthogonal du point A' sur (AC) donc :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$$

On en déduit que :

$$AH = \frac{\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{90}{10} = 9$$

Ainsi : $\boxed{AH = 9}$

▪ L'abscisse de H est la même que celle de A' et son ordonnée est la même que celle de A.

5) On appelle I le milieu du segment $[A'H]$. Démontrer que (AI) et (BH) sont perpendiculaires.

▪ Déterminons les coordonnées de I :

$$x_I = \frac{x_{A'}+x_H}{2} = \frac{-2+(-2)}{2} = -2$$

et

$$y_I = \frac{y_{A'}+y_H}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = -0,5$$

Ainsi, $\boxed{I(-2\ ;\ -0,5)}$

▪ Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -2-7 \\ -0,5-(-2) \end{pmatrix} \text{ ou encore } \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -9 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -2-(-1) \\ (-2)-4 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

▪ Comme le repère est orthonormé :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = -9 \times (-1) + 1,5 \times (-6) = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux ce qui implique que les droites (AI) et (BH) sont perpendiculaires.