CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M03

EXERCICE N°1 En utilisant des coordonnées
VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **2)** $(2\vec{u})\cdot(5\vec{v})$ **3)** $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

EXERCICE N°2 En utilisant des coordonnées
VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-5\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -4)$, $C(5\ ;\ 1)$ et $D(3\ ;\ 7)$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **2)** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$ **3)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ **4)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}$

EXERCICE N°3 Démontrer avec des coordonnées
VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé, on donne les points $D(3\ ;\ -1)$, $E(1\ ;\ 3)$, $F(0\ ;\ -2)$ et 1 $G(6\ ;\ 1)$

Montrer que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

EXERCICE N°4 Démontrer avec des coordonnées
VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-5\ ;\ -2)$, $M(1\ ;\ -3)$, $T(-1\ ;\ 2)$ et $H(0\ ;\ 8)$.

Montrer que les droites (MA) et (TH) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°5 Démontrer avec des coordonnées
VOIR LE CORRIGÉ

On se place dans un repère orthonormé.

Donner un vecteur directeur pour chacune des droites (d_1) et (d_2) suivantes et en déduire qu'elles sont perpendiculaires.

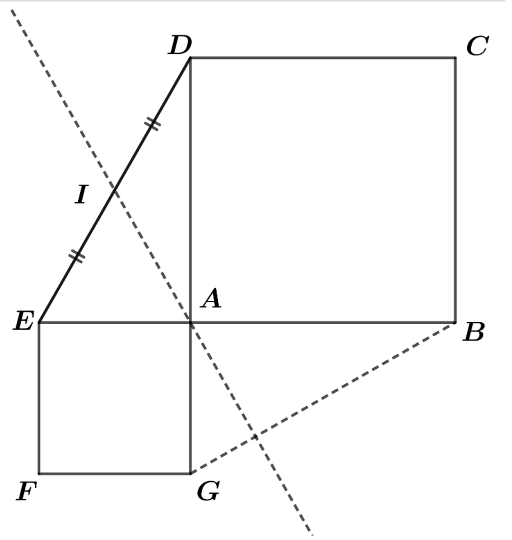
1) Pour les droites (d_1) et (d_2) d'équations cartésiennes respectives : $x-y+3 = 0$ et $2x+2y-1 = 0$

2) Pour la droite (d_1) d'équation réduite $y = 4x-7$ et la droite (d_2) dont une équation cartésiennes est $-x-4y-2 = 0$

Voir l'exemple n°1

EXERCICE N°6 Avec ou sans coordonnées
VOIR LE CORRIGÉ

$ABCD$ est un carré de côté a et $AEFG$ est un carré de côté b avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-contre. Le point I est le milieu du segment $[DE]$.



1) Avec coordonnées

1.a) Justifier que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$.

1.b) Développer le produit scalaire $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG})$.

1.c) En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

2) Sans coordonnées

2.a) Dans le repère orthonormé $(A\ ;\ B\ ;\ D)$ donner les coordonnées des points A, I, B et G .

2.b) En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M03

EXERCICE N°1 En utilisant des coordonnées RETOUR À L'EXERCICE

Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **2)** $(2\vec{u})\cdot(5\vec{v})$ **3)** $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -7\times(-2) + 4\times(-3) = \mathbf{2}$

2) $(2\vec{u})\cdot(5\vec{v})$

$(2\vec{u})\cdot(5\vec{v}) = 2\times5\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 10\times2 = \mathbf{20}$

3) $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$

On a :

$$\vec{u}-\vec{v} = \begin{pmatrix}-7-(-2)\\4-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$$

et

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}-7+(-2)\\4+(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = -5\times(-9)+7\times1 = \mathbf{52}$

Autre méthode possible :

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2 = ((-7)^2+4^2)-((-2)^2+(-3)^2) = 65-13 = \mathbf{52}$

EXERCICE N°2 En utilisant des coordonnées

RETOUR À L'EXERCICE

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-5\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -4)$, $C(5\ ;\ 1)$ et $D(3\ ;\ 7)$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **2)** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$ **3)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ **4)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}$

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-(-5) \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-(-2) \\ 1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 3\times 7 + (-5)\times 5 = \mathbf{-4}$$

2) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$

On a :

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 7-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD} = (-7)\times 5 + (-5)\times 11 = \mathbf{-90}$$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 3\times(-2) + (-5)\times 6 = \mathbf{-36}$$

4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}$

On a :

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3-(-5) \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} = (-3)\times 8 + 5\times 6 = \mathbf{6}$$

EXERCICE N°3 Démontrer avec des coordonnées

RETOUR À L'EXERCICE

Dans un repère orthonormé, on donne les points $D(3\ ;\ -1)$, $E(1\ ;\ 3)$, $F(0\ ;\ -2)$ et 1 $G(6\ ;\ 1)$

Montrer que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

On a :

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{FG} = -2\times 6 + 4\times 3 = \mathbf{0}$$

On en déduit, par définition, que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

EXERCICE N°4 Démontrer avec des coordonnées

RETOUR À L'EXERCICE

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-5\ ;\ -2)$, $M(1\ ;\ -3)$, $T(-1\ ;\ 2)$ et $H(0\ ;\ 8)$.
Montrer que les droites (MA) et (TH) sont perpendiculaires.

Nous allons choisir un vecteur directeur pour chaque droite et montrer qu'ils sont orthogonaux.
On a :

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur directeur de (MA)
et

$$\overrightarrow{TH} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur directeur de (RS)
Or :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{TH} = -6 \times 1 + 1 \times 6 = \mathbf{0}$$

On en déduit, par définition, que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ sont orthogonaux.
Ce qui implique que les droites (MA) et (TH) sont perpendiculaires.
Ceci est vrai car nous sommes dans le plan...

EXERCICE N°5 Démontrer avec des coordonnées

RETOUR À L'EXERCICE

Voir l'exemple n°1

On se place dans un repère orthonormé.
Donner un vecteur directeur pour chacune des droites (d_1) et (d_2) suivantes et en déduire qu'elles sont perpendiculaires.

1) Pour les droites (d_1) et (d_2) d'équations cartésiennes respectives : $x-y+3 = 0$ et $2x+2y-1 = 0$.

Pour un vecteur directeur de la droite (d_1) posons $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Pour un vecteur directeur de la droite (d_2) posons $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

Or :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times(-2) + 1\times2 = \mathbf{0}$
On en déduit, par définition, que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
Ce qui implique que les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires.
Ceci est vrai car nous sommes dans le plan...

2) Pour la droite (d_1) d'équation réduite $y = 4x-7$ et la droite (d_2) dont une équation cartésiennes est $-x-4y-2 = 0$

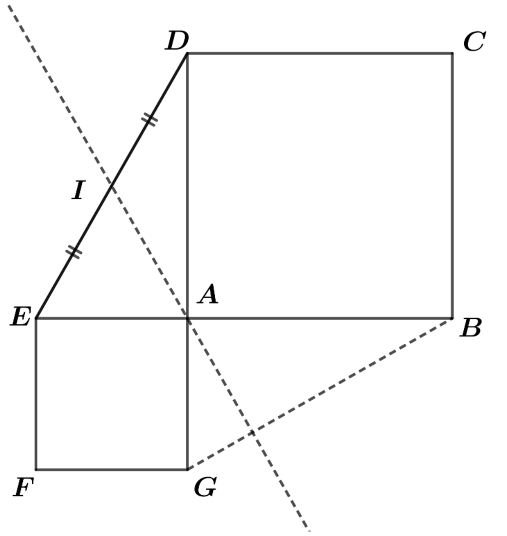
Pour un vecteur directeur de la droite (d_1) posons $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

Pour un vecteur directeur de la droite (d_2) posons $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

Or :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times4 + 4\times(-1) = \mathbf{0}$
On en déduit, par définition, que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
Ce qui implique que les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires.
Ceci est vrai car nous sommes dans le plan...

EXERCICE N°6 *Avec ou sans coordonnées* RETOUR À L'EXERCICE

$ABCD$ est un carré de côté a et $AEFG$ est un carré de côté b avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-contre. Le point I est le milieu du segment $[DE]$.



1) Sans coordonnées

1.a) Justifier que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$.

Notons H le point tel que $EADH$ soit un parallélogramme.
D'après la règle du parallélogramme,
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AI}$.

1.b) Développer le produit scalaire $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG})$.

$ABCD$ et $AEFG$ étant des carrés, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA}$ ainsi que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.
On en déduit que :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}) &= \underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}}_{-AD\times AG}+\underbrace{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA}}_{AE\times BA}+\underbrace{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}}_{0}\\ &= 0+(-a\times b)+b\times a+0\\ &= 0\end{aligned}$$

1.c) En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

D'après la question 1) et la relation de Chasles :
$0=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG})=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BG}$
On en déduit, par définition, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux.
Ce qui implique que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.
Ceci est vrai car nous sommes dans le plan...

2) Avec coordonnées

2.a) Dans le repère orthonormé $(A\ ;B\ ;D)$ donner les coordonnées des points A, I, B et G .
En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

$A(0\ ;0)$, $B(a\ ;0)$, $C(a\ ;a)$, $D(0\ ;a)$, $E(-b\ ;0)$, $F(-b\ ;-b)$ et $G(0\ ;-b)$
Pour le point $I(x_I\ ;y_I)$ milieu de $[ED]$:

$$x_I=\frac{x_E+x_D}{2}=\frac{-b+0}{2}=\frac{-b}{2} \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_E+y_D}{2}=\frac{0+a}{2}=\frac{a}{2}$$

Ainsi : $I\left(\frac{-b}{2}\ ;\frac{a}{2}\right)$

Nous allons choisir un vecteur directeur pour chaque droite et montrer qu'ils sont orthogonaux.
On a :

$$\overrightarrow{AI}=\begin{pmatrix}\frac{-b}{2}-0\\ \frac{a}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-b}{2}\\ \frac{a}{2}\end{pmatrix}$$

qui est un vecteur directeur de (AI)
et

$$\overrightarrow{BG}=\begin{pmatrix}0-a\\ -b-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\ -b\end{pmatrix}$$

qui est un vecteur directeur de (BG)
Or :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BG} = \frac{-b}{2}\times(-a) + \frac{a}{2}\times(-b) = \mathbf{0}$$

On en déduit, par définition, que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux.
Ce qui implique que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.
Ceci est vrai car nous sommes dans le plan…