

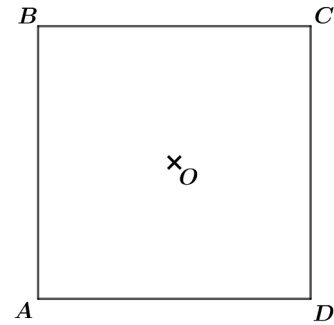
CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M02

EXERCICE N°1 *En utilisant la projection orthogonale*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

Soit un carré $ABCD$ de centre O et de côté 6, calculer les produits scalaires suivants.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ | 2) $\vec{DC} \cdot \vec{AB}$ |
| 3) $\vec{BC} \cdot \vec{BD}$ | 4) $\vec{AB} \cdot \vec{DO}$ |



EXERCICE N°2 *En utilisant la projection orthogonale*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

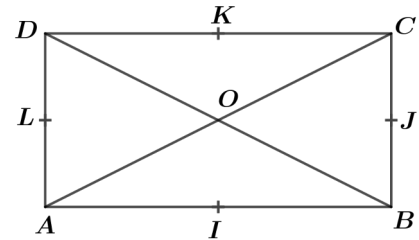
On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $CB = 3$ cm :

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

Le point O est le centre du rectangle $ABCD$.

Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$ | 2) $\vec{IA} \cdot \vec{IB}$ | 3) $\vec{IA} \cdot \vec{BI}$ |
| 4) $\vec{DL} \cdot \vec{DO}$ | 5) $\vec{KO} \cdot \vec{DB}$ | 6) $\vec{AB} \cdot \vec{OC}$ |

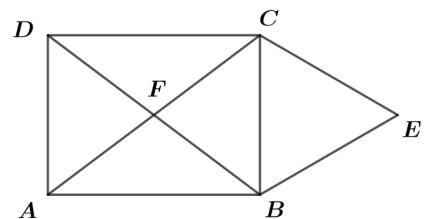


EXERCICE N°3

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

$ABCD$ est un rectangle de centre F et E est le symétrique du point F par rapport à la droite (BC) . Calculer les produits scalaires suivants.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{BA} \cdot \vec{BE}$ | 2) $\vec{CF} \cdot \vec{CD}$ | 3) $\vec{AF} \cdot \vec{AB}$ |
| 4) $\vec{AB} \cdot \vec{BE}$ | 5) $\vec{BF} \cdot \vec{DC}$ | 6) $\vec{AF} \cdot \vec{BE}$ |



EXERCICE N°4 *Produit scalaire et parallélogramme (calculatrice autorisée)*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 9$, $AD = 6$ et $AC = 7$

- 1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
- 2) En déduire la mesure de l'angle \widehat{BAD} en radians arrondi à 10^{-2} puis en degrés arrondi à 10^{-2} .

EXERCICE N°5 *Produit scalaire et triangle (calculatrice autorisée)*

[VOIR LE CORRIGÉ](#)

ABC est un triangle avec $AB = 6$, $AC = 7$ et $BC = 8$.

- 1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 2) En déduire la mesure de l'angle \widehat{BAC} en radians arrondi à 10^{-2} puis en degrés arrondi à 10^{-2} .

CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M02C

EXERCICE N°1

En utilisant la projection orthogonale

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

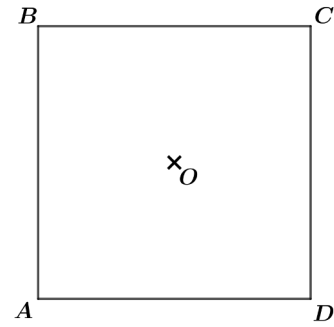
Soit un carré $ABCD$ de centre O et de côté 6, calculer les produits scalaires suivants.

1) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

2) $\vec{CD} \cdot \vec{AB}$

3) $\vec{BC} \cdot \vec{BD}$

4) $\vec{AB} \cdot \vec{DO}$



1) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré donc l'angle \widehat{ABC} est droit et les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} sont orthogonaux.

On en déduit que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

2) $\vec{CD} \cdot \vec{AB}$

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré donc :

$$(AB) \parallel (CD) .$$

Ainsi les vecteurs \vec{CD} et \vec{AB} sont colinéaires, de plus ils sont de sens contraires.

On en déduit que :

$$\vec{CD} \cdot \vec{AB} = -CD \times AB = -6 \times 6 = -36$$

3) $\vec{BC} \cdot \vec{BD}$

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré donc $(BC) \perp (CD)$.

Ainsi, le point C est le projeté orthogonal de D sur la droite (BC) .

On en déduit que :

$$\vec{BC} \cdot \vec{BD} = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BC}\|^2 = 6^2 = 36$$

4) $\vec{AB} \cdot \vec{DO}$

Notons H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) .

On a alors :

$$(HO) \perp (AB)$$

De plus, le quadrilatère $ABCD$ est un carré donc :

$$(AB) \perp (AD) .$$

On en déduit que :

d'une part, le point A est le projeté orthogonal de D sur la droite (AB)

et que d'autre part :

$$(HO) \parallel (AD)$$

Le théorème de Thalès appliqué dans les triangles BHO et BAD donne alors :

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$$

et on en déduit que :

$$AH = \frac{1}{2} \times 6 = 3 .$$

Pour finir :

$$\vec{AB} \cdot \vec{DO} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

Ces derniers vecteurs ayant le même sens :

$$\vec{AB} \cdot \vec{DO} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH = 6 \times 3 = 18$$

CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M02C

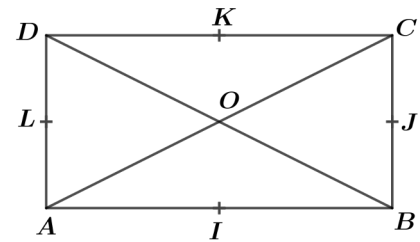
EXERCICE N°2 *En utilisant la projection orthogonale*

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $CB = 3$ cm :

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

Le point O est le centre du rectangle $ABCD$.



Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$ | 2) $\vec{IA} \cdot \vec{IB}$ | 3) $\vec{IA} \cdot \vec{BI}$ |
| 4) $\vec{DL} \cdot \vec{DO}$ | 5) $\vec{KO} \cdot \vec{DB}$ | 6) $\vec{AB} \cdot \vec{OC}$ |

1) $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$

Dans le rectangle $ABCD$, B est le projeté orthogonal de C sur (AI) .

On en déduit que :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AC} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$$

De plus, les vecteurs \vec{AI} et \vec{AB} sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AC} = \vec{AI} \cdot \vec{AB} = AI \times AB = 3 \times 6 = 18$$

2) $\vec{IA} \cdot \vec{IB}$

Les vecteurs \vec{IA} et \vec{IB} sont colinéaires et de sens contraires, donc :

$$\vec{IA} \cdot \vec{IB} = -IA \times IB = -3 \times 3 = -9$$

3) $\vec{IA} \cdot \vec{BI}$

Les vecteurs \vec{IA} et \vec{BI} sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\vec{IA} \cdot \vec{BI} = IA \times IB = 3 \times 3 = 9$$

4) $\vec{DL} \cdot \vec{DO}$

Dans le rectangle $ABCD$, L est le projeté orthogonal de O sur (DL) .

On en déduit que :

$$\vec{DL} \cdot \vec{DO} = \vec{DL} \cdot \vec{DL} = DL^2 = 1,5^2 = 2,25$$

5) $\vec{KO} \cdot \vec{DB}$

Dans le rectangle $ABCD$, D, L et A sont les projetés orthogonaux respectifs de K, O et B sur (DA) .

On en déduit que :

$$\vec{KO} \cdot \vec{DB} = \vec{DL} \cdot \vec{DA}$$

De plus, les vecteurs \vec{DL} et \vec{DA} sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\vec{KO} \cdot \vec{DB} = \vec{DL} \cdot \vec{DA} = DL \times DA = 1,5 \times 3 = 4,5$$

6) $\vec{AB} \cdot \vec{OC}$

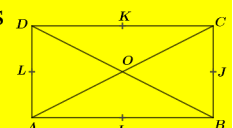
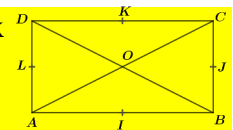
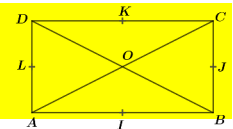
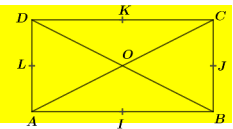
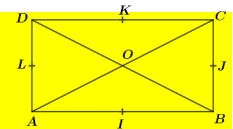
Dans le rectangle $ABCD$, I et B sont les projetés orthogonaux respectifs de O et C sur (AB) .

On en déduit que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{OC} = \vec{AB} \cdot \vec{IB}$$

De plus, les vecteurs \vec{AB} et \vec{IB} sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{OC} = \vec{AB} \cdot \vec{IB} = AB \times IB = 6 \times 3 = 18$$

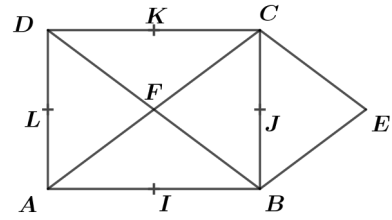


CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M02C

EXERCICE N°3

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

$ABCD$ est un rectangle de centre F et E est le symétrique du point F par rapport à la droite (BC) . Les points I, J, K et L sont les projetés orthogonaux de F respectivement sur $(AB), (BC), (CD)$ et (DA) .
Calculer les produits scalaires suivants.



- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{BA} \cdot \vec{BE}$ | 2) $\vec{CF} \cdot \vec{CD}$ | 3) $\vec{AF} \cdot \vec{AB}$ |
| 4) $\vec{AB} \cdot \vec{BE}$ | 5) $\vec{BF} \cdot \vec{DC}$ | 6) $\vec{AF} \cdot \vec{BE}$ |

▪ Remarquons d'abord que $FBEC$ est un losange. En effet, $ABCD$ étant un rectangle :

$$FC = FB$$

et par symétrie axiale :

$$FC = CE \text{ et } FB = BE$$

Ainsi, $FBEC$ a bien ses quatre côtés de même longueur.

▪ Remarquons également que les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1) $\vec{BA} \cdot \vec{BE}$

$FBEC$ étant un losange,

$$\vec{BA} \cdot \vec{BE} = \vec{BA} \cdot \vec{FC}$$

Le point I est le projeté orthogonal de F sur (AB) et comme $ABCD$ est un rectangle, le point B est la projeté orthogonal de C sur (AB) donc :

$$\vec{BA} \cdot \vec{FC} = \vec{BA} \cdot \vec{IB}$$

De plus les vecteurs \vec{BA} et \vec{IB} sont colinéaires et de sens contraires, ainsi :

$$\vec{BA} \cdot \vec{IB} = -BA \times IB = -BA \times \frac{BA}{2} = -\frac{1}{2} BA^2$$

En conclusion :

$$\boxed{\vec{BA} \cdot \vec{BE} = -\frac{1}{2} BA^2}$$

2) $\vec{CF} \cdot \vec{CD}$

Le point K est le projeté orthogonal de F sur (CD) donc :

$$\vec{CF} \cdot \vec{CD} = \vec{CK} \cdot \vec{CD}$$

De plus les vecteurs \vec{CK} et \vec{CD} sont colinéaires et de même sens, ainsi :

$$\vec{CK} \cdot \vec{CD} = CK \times CD = \frac{1}{2} CD \times CD$$

En conclusion :

$$\boxed{\vec{CF} \cdot \vec{CD} = \frac{1}{2} CD^2}$$

3) $\vec{AF} \cdot \vec{AB}$

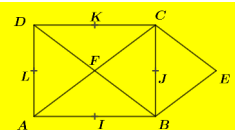
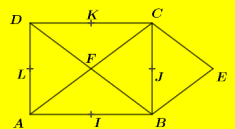
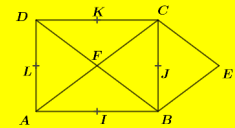
Le point I est le projeté orthogonal de F sur (AB) donc :

$$\vec{AF} \cdot \vec{AB} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$$

De plus les vecteurs \vec{AI} et \vec{AB} sont colinéaires et de même sens, ainsi :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AB} = AI \times AB = \frac{1}{2} AB \times AB$$

$$\boxed{\vec{AF} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} AB^2}$$



$$4) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = -\left(-\frac{1}{2} AB^2\right) = \frac{1}{2} AB^2$$

$$5) \quad \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DC}$$

Le point K est le projeté orthogonal de F sur (CD) et comme $ABCD$ est un rectangle, le point C est la projeté orthogonal de B sur (CD) donc :

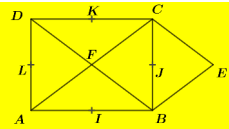
$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{DC}$$

De plus les vecteurs \overrightarrow{CK} et \overrightarrow{DC} sont colinéaires et de sens contraires, ainsi :

$$\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{DC} = -CK \times DC = -\frac{DC}{2} \times DC = -\frac{1}{2} DC^2$$

En conclusion :

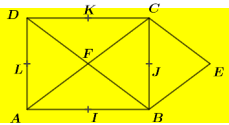
$$\boxed{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2} DC^2}$$



$$6) \quad \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE}$$

$FBEC$ étant un losange,

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AF} = AF^2$$

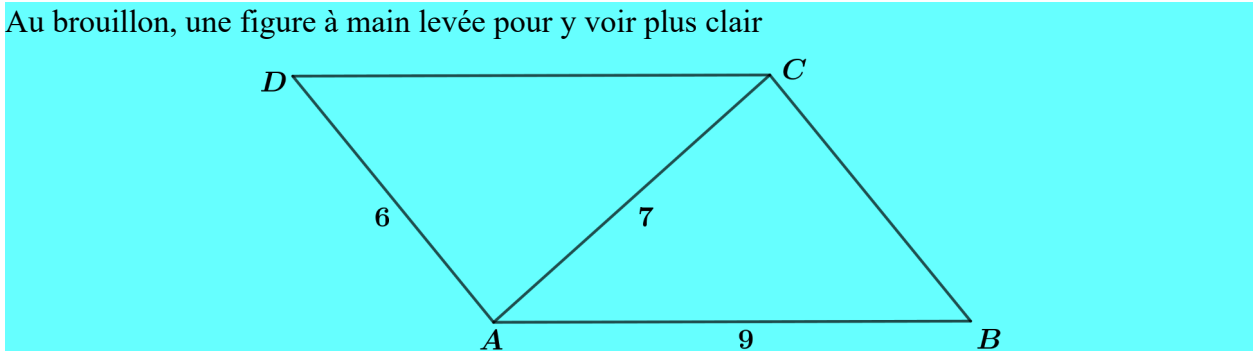


CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M02C

EXERCICE N°4 Produit scalaire et parallélogramme (calculatrice autorisée) [RETOUR À L'EXERCICE](#)

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 9$, $AD = 6$ et $AC = 7$

Au brouillon, une figure à main levée pour y voir plus clair



1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme, on peut écrire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) = \frac{7^2 - 9^2 - 6^2}{2} = \frac{-68}{2} = -34$$

2) En déduire la mesure de l'angle \widehat{BAD} en radians arrondi à 10^{-2} puis en degrés arrondi à 10^{-2} .

On sait que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \|AB\| \|AD\| \cos(\widehat{BAD})$$

De plus, $\|AB\|$ et $\|AD\|$ sont non nuls, on peut donc écrire :

$$\cos(\widehat{BAD}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|AB\| \|AD\|} = \frac{-34}{9 \times 6} = \frac{-34}{54} = -\frac{17}{27}$$

On en déduit que :

$$\widehat{BAD} = \arccos\left(\frac{-17}{27}\right) \approx 2,25 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \widehat{BAD} = \arccos\left(\frac{-17}{27}\right) \approx 129,02^\circ$$

$$\arccos\left(-\frac{17}{27}\right)$$

$$\pi - \arccos\left(\frac{17}{27}\right) \approx 2.251872715$$

(Calculatrice en mode radian)

$$\arccos\left(-\frac{17}{27}\right)$$

$$180 - \arccos\left(\frac{17}{27}\right) \approx 129.0228026$$

(Calculatrice en mode degré)

Attention aux arrondis si vous ne voulez pas changer de mode :

$$\frac{2.25 \times 180}{3.14} \quad 128.9808917$$

$$\frac{2.25187 \times 180}{3.14159} \quad 129.022756$$

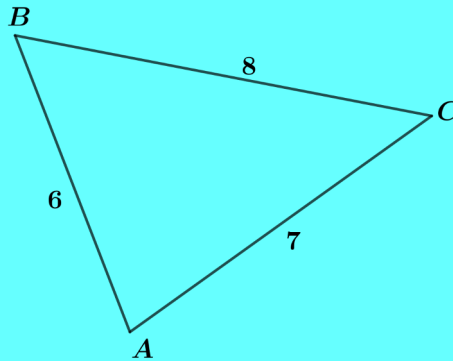
CALCUL VECTORIEL : LE PRODUIT SCALAIRE M02C

EXERCICE N°5 Produit scalaire et triangle (calculatrice autorisée)

[RETOUR À L'EXERCICE](#)

ABC est un triangle avec $AB = 6$ $AC = 7$ et $BC = 8$.

Au brouillon, une figure à main levée pour y voir plus clair



1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Dans le triangle ABC ,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2} = \frac{21}{2}$$

2) En déduire la mesure de l'angle \widehat{BAC} en radians arrondi à 10^{-2} puis en degrés arrondi à 10^{-2} .

On sait que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|AB\| \|AC\| \cos(\widehat{BAC})$$

De plus, $\|AB\|$ et $\|AC\|$ sont non nuls, on peut donc écrire :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|AB\| \|AC\|} = \frac{\frac{21}{2}}{6 \times 7} = \frac{21}{42} = \frac{1}{4}$$

On en déduit que :

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \approx \mathbf{1,32 \text{ rad}} \quad \text{ou} \quad \widehat{BAD} = \arccos\left(\frac{-17}{27}\right) \approx \mathbf{75,52^\circ}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

1.318116072

(Calculatrice en mode radian)

$$\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

75.52248781

(Calculatrice en mode degré)

Attention aux arrondis si vous ne voulez pas changer de mode :

$$\frac{1.32 \times 180}{3.14}$$

75.66878981

$$\frac{1.31812 \times 180}{3.14159}$$

75.52277668