# CALCUL VECTORIEL : PRODUIT SCALAIRE M01

## *EXERCICE N°1 S'approprier la définition* VOIR LE CORRIGÉ

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chaque cas.

**1)** $\|\vec{u}\| = 3$ ; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{4}\,rad$

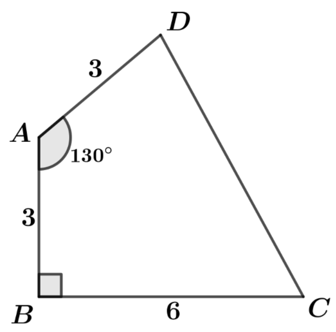
**2)** $\|\vec{u}\| = 5$ ; $\|\vec{v}\| = 6$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = 60\,°$

## *EXERCICE N°2 Avec une figure et une calculatrice* VOIR LE CORRIGÉ

À l'aide du quadrilatère ci-contre. Calculer les produits scalaires suivants (On arrondira à $10^{-2}$ ) :

**1)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

**2)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$




## *EXERCICE N°3 Utiliser la définition* VOIR LE CORRIGÉ

**1)** On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 7$ , $\|\vec{v}\| = 10$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 35\sqrt{3}$ . Déterminer $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}$ . (*On donnera la mesure en radians ET en degrés*)

**2)** On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ , $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\,rad$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 9$ . Déterminer $\|\vec{v}\|$ .

## *EXERCICE N°4 Utiliser la linéarité du produit scalaire* VOIR CORRIGÉ

On donne $\|\vec{u}\| = 3$ ; $\|\vec{v}\| = 6$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\,rad$ .

**1)** Calculer les produits scalaires suivants :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.a)** | $\vec{u}\cdot\vec{v}$ | **1.b)** | $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$ | **1.c)** | $\vec{u}\cdot(2\vec{v})$ |
| **1.d)** | $(2\vec{u})\cdot(2\vec{v})$ | **1.e)** | $(-5\vec{u})\cdot\vec{v}$ | **1.f)** | $\vec{u}\cdot(-5\vec{v})$ |
| **1.g)** | $(-5\vec{u})\cdot(-5\vec{v})$ | **1.h)** | $(2\vec{u})\cdot(-5\vec{v})$ | **1.i)** | $(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})$ |
| **1.j)** | $(2\vec{u}-5\vec{v})^2$ | **1.k)** | $(2\vec{u}+5\vec{v})^2$ | **1.l)** | $(2\vec{u}-5\vec{v})\cdot(2\vec{u}+5\vec{v})$ |

**2)** On remplace $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\,rad$ par $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{2}\,rad$ . Reprendre tous les calculs de la questions précédente.

## *EXERCICE N°5 Réinvestir d'anciennes connaissances* VOIR LE CORRIGÉ

On donne $A$ , $B$ , $C$ , $D$ et $I$ cinq points distincts du plan.

**1)** On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ , $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ . Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

**2)** On sait que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ , $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0$ . Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

**EXERCICE N°1** ***S'approprier la définition*** RETOUR À L'EXERCICE

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chaque cas.

**1)** $\|\vec{u}\| = 3$ ; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{4}\,rad$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)\\ &= 3\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 12\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 6\sqrt{2}}$$

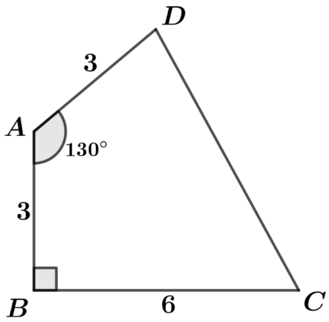
**2)** $\|\vec{u}\| = 5$ ; $\|\vec{v}\| = 6$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = 60\,°$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)\\ &= 5\times6\times\cos(60\,°)\\ &= 30\times\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 15}$$

**EXERCICE N°2** *Avec une figure et une calculatrice* RETOUR À L'EXERCICE

À l'aide du quadrilatère ci-contre. Calculer les produits scalaires suivants (On arrondira à $10^{-2}$ ) :




**1)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

**2)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

**1)**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})}\right)\\ &= 3\times3\times\cos(130\,°)\\ &= 9\cos(130\,°)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \approx -5{,}79}$$

**2)**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC})}\right)\\ &= 3\times6\times\cos(90\,°)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0}$$

**EXERCICE N°3** ***Utiliser la définition*** RETOUR À L'EXERCICE

**1)** On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 7$ , $\|\vec{v}\| = 10$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 35\sqrt{3}$ . Déterminer $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}$ . (*On donnera la mesure en radians ET en degrés*)

Comme $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Ainsi,

$$\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) = \frac{35\sqrt{3}}{7\times 10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\ rad} \quad \text{ou} \quad \boxed{\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = 30\,°}$$

**2)** On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ , $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6} rad$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 9$ . Déterminer $\|\vec{v}\|$ .

Comme $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} \neq \frac{\pi}{2} rad$ :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right) \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)}$$

Ainsi,

$$\|\vec{v}\| = \frac{9}{3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9}{\frac{3\times 3}{2}} = 2$$

Ou encore :

$$\boxed{\|\vec{v}\| = 2}$$

**EXERCICE N°4** ***Utiliser la linéarité du produit scalaire*** RETOUR À L'EXERCICE

On donne $\|\vec{u}\| = 3$ ; $\|\vec{v}\| = 6$ et $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\,rad$ .

**1)** Calculer les produits scalaires suivants :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.a)** | $\vec{u}\cdot\vec{v}$ | **1.b)** | $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$ | **1.c)** | $\vec{u}\cdot(2\vec{v})$ |
| **1.d)** | $(2\vec{u})\cdot(2\vec{v})$ | **1.e)** | $(-5\vec{u})\cdot\vec{v}$ | **1.f)** | $\vec{u}\cdot(-5\vec{v})$ |
| **1.g)** | $(-5\vec{u})\cdot(-5\vec{v})$ | **1.h)** | $(2\vec{u})\cdot(-5\vec{v})$ | **1.i)** | $(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})$ |
| **1.j)** | $(2\vec{u}-5\vec{v})^2$ | **1.k)** | $(2\vec{u}+5\vec{v})^2$ | **1.l)** | $(2\vec{u}-5\vec{v})\cdot(2\vec{u}+5\vec{v})$ |

**2)** On remplace $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{6}\,rad$ par $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \frac{\pi}{2}\,rad$ . Reprendre tous les calculs de la questions précédente.

**1)**

**1.a)**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})}\right)$$
$$= 3\times6\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 18\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 9\sqrt{3}}$$

**1.b)**

$$(2\vec{u})\cdot\vec{v} = 2\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

**1.c)**

$$\vec{u}\cdot(2\vec{v}) = 2\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

**1.d)**

$$(2\vec{u})\cdot(2\vec{v}) = 2\times2\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

**1.e)**

$$(-5\vec{u})\cdot\vec{v} = -5\times\vec{u}\cdot\vec{v} = -5\times9\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$$

**1.f)**

$$\vec{u}\cdot(-5\vec{v}) = -5\times\vec{u}\cdot\vec{v} = -5\times9\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$$

**1.g)**

$$(-5\vec{u})\cdot(-5\vec{v}) = (-5)\times(-5)\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 25\times9\sqrt{3} = 225\sqrt{3}$$

**1.h)**

$$(2\vec{u})\cdot(-5\vec{v}) = 2\times(-5)\times\vec{u}\cdot\vec{v} = -10\times9\sqrt{3} = -90\sqrt{3}$$

**1.i)**

$$\underbrace{(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})}_{k(a-b)} = \underbrace{(2\vec{u})\cdot\vec{u}-(2\vec{u})\cdot5\vec{v}}_{ka-kb} = 2\times\vec{u}\cdot\vec{u}-10\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2-10\times9\sqrt{3} = 2\times9-10\times9\sqrt{3}$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v}) = 18-90\sqrt{3}}$$

**1.j)**

$$(2\vec{u}-5\vec{v})^2 = (2\vec{u}-5\vec{v})\cdot(2\vec{u}-5\vec{v})$$
$$= 2\times2\vec{u}\cdot\vec{u} - 2\times5\times\vec{u}\cdot\vec{v} - 5\times2\times\vec{v}\cdot\vec{u} + 5\times5\times\vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$= 4\|\vec{u}\|^2 - 10\times\vec{u}\cdot\vec{v} - \underbrace{10\times\vec{u}\cdot\vec{v}}_{car\ \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}} + 25\|\vec{v}\|^2$$
$$= 4\|\vec{u}\|^2 - 20\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 25\|\vec{v}\|^2$$

Ainsi,

$$\underbrace{(2\vec{u}-5\vec{v})^2}_{(a-b)^2} = \underbrace{4\|\vec{u}\|^2 - 20\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 25\|\vec{v}\|^2}_{a^2-2ab+b^2} = 4\times3^2-20\times9\sqrt{3}+25\times6^2 = \mathbf{936-180\sqrt{3}}$$

Les identités remarquables fonctionnent avec le produit scalaire !

**1.k)**

Sans les identités remarquables, on serait obligé de détailler à nouveau tous les calculs :

$$\begin{aligned}(2\vec{u}+5\vec{v})^2 &= (2\vec{u}+5\vec{v})\cdot(2\vec{u}+5\vec{v})\\ &= 2\times 2\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\times 5\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 5\times 2\times\vec{v}\cdot\vec{u} + 5\times 5\times\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= 4\|\vec{u}\|^2 + 10\times\vec{u}\cdot\vec{v} + \underbrace{10\times\vec{u}\cdot\vec{v}}_{car\ \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}} + 25\|\vec{v}\|^2\\ &= 4\|\vec{u}\|^2 + 20\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 25\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Avec, on va quand même beaucoup plus vite :

$$\underbrace{(2\vec{u}+5\vec{v})^2}_{(a+b)^2} = \underbrace{4\|\vec{u}\|^2 + 20\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 25\|\vec{v}\|^2}_{a^2+2ab+b^2} = 4\times 3^2+20\times 9\sqrt{3}+25\times 6^2 = \mathbf{936+180\sqrt{3}}$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u}+5\vec{v})^2 = 936+180\sqrt{3}}$$

**1.l)**

$$\underbrace{(2\vec{u}-5\vec{v})(2\vec{u}+5\vec{v})}_{(a-b)(a+b)} = \underbrace{4\|\vec{u}\|^2 - 25\|\vec{v}\|^2}_{a^2-b^2} = 4\times 3^2-25\times 36 = -864$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u}-5\vec{v})(2\vec{u}+5\vec{v}) = -864}$$

**2)**

Avec $\widehat{(\vec{u}\ ;\ \vec{v})} = \dfrac{\pi}{2}\,rad$ , $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$ Relire la propriété n°6…

**2.a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

**2.b)** $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$

$(2\vec{u})\cdot\vec{v} = 0$

**2.c)** $\vec{u}\cdot(2\vec{v})$

$\vec{u}\cdot(2\vec{v}) = 0$

**2.d)** $(2\vec{u})\cdot(2\vec{v})$

$(2\vec{u})\cdot(2\vec{v}) = 0$

**2.e)** $(-5\vec{u})\cdot\vec{v}$

$(-5\vec{u})\cdot\vec{v} = 0$

**2.f)** $\vec{u}\cdot(-5\vec{v})$

$\vec{u}\cdot(-5\vec{v}) = 0$

**2.g)** $(-5\vec{u})\cdot(-5\vec{v})$

$(-5\vec{u})\cdot(-5\vec{v}) = 0$

**2.h)** $(2\vec{u})\cdot(-5\vec{v})$

$(2\vec{u})\cdot(-5\vec{v}) = 0$

Trop facile !

**2.i)** $(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})$

« $\xcancel{(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v}) = 0}$ » STOP !

Il ne faut pas aller trop vite non plus.

$$(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v}) = 2\times\vec{u}\cdot\vec{u}-10\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2-10\times 0 = 2\times 3^2$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u})\cdot(\vec{u}-5\vec{v}) = 18}$$

**2.j)**

$$\underbrace{(2\vec{u}-5\vec{v})^2}_{(a-b)^2} = \underbrace{4\|\vec{u}\|^2 - 20\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 25\|\vec{v}\|^2}_{a^2-2ab+b^2} = 4\|\vec{u}\|^2 - 20\times 0 + 25\|\vec{v}\|^2 = 4\times 3^2+25\times 6^2$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u}-5\vec{v})^2 = 936}$$

**2.k)**

$$\underbrace{(2\vec{u}+5\vec{v})^2}_{(a+b)^2} = \underbrace{4\|\vec{u}\|^2 + 20\times\vec{u}\cdot\vec{v} + 25\|\vec{v}\|^2}_{a^2+2ab+b^2} = 4\|\vec{u}\|^2 + 20\times 0 + 25\|\vec{v}\|^2 = 4\times 3^2+25\times 6^2$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u}+5\vec{v})^2 = 936}$$

**2.l)**

$$\underbrace{(2\vec{u}-5\vec{v})(2\vec{u}+5\vec{v})}_{(a-b)(a+b)} = \underbrace{4\|\vec{u}\|^2 - 25\|\vec{v}\|^2}_{a^2-b^2} = 4\times 3^2-25\times 36 = -864$$

Ainsi,

$$\boxed{(2\vec{u}-5\vec{v})(2\vec{u}+5\vec{v}) = -864}$$

## EXERCICE N°5 *Réinvestir d'anciennes connaissances* 

RETOUR À L'EXERCICE

On donne $A$ , $B$ , $C$ , $D$ et $I$ cinq points distincts du plan.

**1)** On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ , $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ . Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

Les points étant tous distincts, aucune des normes $\|\overrightarrow{AB}\|$ , $\|\overrightarrow{AD}\|$ , $\|\overrightarrow{BC}\|$ ou $\|\overrightarrow{CD}\|$ n'est nulle.

On en déduit que :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$ rad
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$ rad
- $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

Ainsi, le quadrilatère $ABCD$ possède trois angles droits donc quatre angles droits.

D'où $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle}}$

**2)** On sait que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ , $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0$ . Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

- $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

signifie que $I$ est le milieu de $[AC]$

(relisez votre cours de seconde, regardez la propriété n°4 et réfléchissez)

- $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$

signifie que $I$ est le milieu de $[BD]$

- Les points étant tous distincts, aucune des normes $\|\overrightarrow{IA}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{IB}\| \neq 0$ .

On en déduit que :

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IB}\right)}\right) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IB}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

Ainsi, dans le quadrilatère $ABCD$ , les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaire.

Donc $\boxed{ABCD \text{ est un losange}}$