TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS M04

EXERCICE N°1 Savoir retrouver et utiliser les valeurs remarquables

VOIR LE CORRIGÉ

1.a) Déterminer un réel x appartenant à l'intervalle $[-\pi \ ; \ \pi[$ associé à $\dfrac{83\pi}{4}$.

1.b) En déduire $\cos\left(\dfrac{83\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(\dfrac{83\pi}{4}\right)$.

2) Calculer $\cos\left(\dfrac{52\pi}{3}\right)$ et en déduire $\sin\left(\dfrac{52\pi}{3}\right)$.

3) Calculer $\sin\left(-\dfrac{37\pi}{6}\right)$ et en déduire $\cos\left(-\dfrac{37\pi}{6}\right)$.

EXERCICE N°2 Les bonnes réponses : pas plus, pas moins

VOIR LE CORRIGÉ

1) Résoudre sur $[-\pi \ ; \ \pi[$ l'inéquation $\dfrac{2\cos(x)}{\sqrt{3}} > 1$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2\cos(x)}{\sqrt{3}} > 1$.

3) Résoudre sur $[0 \ ; \ 2\pi[$ l'inéquation $2(\sin(x)+1) \leqslant \dfrac{\sqrt{12}}{2}+2$.

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $2(\sin(x)+1) \leqslant \dfrac{\sqrt{12}}{2}+2$.

EXERCICE N°3 Une étude de fonction

VOIR LE CORRIGÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\cos(x)}$.

1) On note C_f la courbe représentative de f.
1.a) Montrer que f est paire et 2π-périodique. Interpréter graphiquement.
1.b) En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.

2) Pour cette question, on étudiera f sur l'intervalle $I = [-\pi \ ; \ \pi[$. On admet que f est dérivable de dérivée $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$.
2.a) Résoudre l'inéquation $-\sin(x) > 0$.
2.b) Montrer que f est croissante sur $[-\pi \ ; \ 0]$ et décroissante sur $[0 \ ; \ \pi[$. En déduire les extrema locaux de f sur I.
3) Tracer C_f sur $[-2\pi \ ; \ 3\pi[$.

EXERCICE N°4 Des équations et des inéquations plus complexes

VOIR LE CORRIGÉ

Soit f la fonction définie sur $[-\pi \ ; \ \pi[$ par :

$$f(x) = 4\cos^2(x)+2(\sqrt{2}-1)\cos(x)-\sqrt{2}\cdot$$

Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de l'inéquation $f(x) > 0$.
1) On pose $X = \cos(x)$.
1.a) Montrer que $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
1.b) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} = 0$.
1.c) Résoudre sur $[-1 \ ; 1]$ l'équation $4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} = 0$. (On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues).
1.d) En déduire les solutions sur $[-\pi \ ; \ \pi[$ de l'équation $f(x) = 0$.

2) On pose $X = \cos(x)$.
2.a) Résoudre sur $[-1 \ ; \ 1]$ l'inéquation $4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} > 0$.
2.b) En déduire les solutions sur $[-\pi \ ; \ \pi[$ de l'inéquation $f(x) > 0$.

EXERCICE N°1 Savoir retrouver et utiliser les valeurs remarquables

RETOUR À L'EXERCICE

1.a) Déterminer un réel x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$ associé à $\frac{83\pi}{4}$.

On doit enlever les « tours inutiles », c'est à dire qu'on cherche l' entier k tel que :

$$-\pi \leqslant \frac{83\pi}{4} - k\times 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{4} \leqslant \frac{83\pi}{4} - \frac{k\times 8\pi}{4} \leqslant \frac{4\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -87\pi \leqslant -k\times 8\pi \leqslant -79\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{87}{8} \geqslant k \geqslant \frac{79}{8}$$

On en déduit que $k = 10$

puis $\frac{83\pi}{4} - \frac{10\times 8\pi}{4} = \frac{83\pi}{4} - 10\times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$

et on a bien $-\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} \leqslant \pi$

$\frac{83\pi}{4} - 10\times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$,

le réel cherché est donc $\boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

1.b) En déduire $\cos\left(\frac{83\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(\frac{83\pi}{4}\right)$.

- $\cos\left(\frac{83\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 10\times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(\frac{83\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 10\times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Calculer $\cos\left(\frac{52\pi}{3}\right)$ et en déduire $\sin\left(\frac{52\pi}{3}\right)$.

On doit enlever les « tours inutiles », c'est à dire qu'on cherche l' entier k tel que :

$$-\pi \leqslant \frac{52\pi}{3} - k\times 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow \frac{-3\pi}{3} \leqslant \frac{52\pi}{3} - \frac{k\times 6\pi}{3} \leqslant \frac{3\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -3\pi \leqslant 52\pi - k\times 6\pi \leqslant 3\pi$$

$$\Leftrightarrow -55\pi \leqslant -k\times 6\pi \leqslant -49\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{55}{6} \geqslant k \geqslant \frac{49}{6}$$

On en déduit que $k = 9$

- $\frac{52\pi}{3} - 9\times 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$,
- $\cos\left(\frac{52\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{3} + 9\times 2\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{52\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-2\pi}{3} + 9\times 2\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Calculer $\sin\left(-\dfrac{37\pi}{6}\right)$ et en déduire $\cos\left(-\dfrac{37\pi}{6}\right)$.

$$-\pi \leqslant -\frac{37\pi}{6}-k\times 2\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow \frac{-6\pi}{6} \leqslant -\frac{37\pi}{6}-\frac{k\times 12\pi}{6} \leqslant \frac{6\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -6\pi \leqslant -37\pi-k\times 12\pi \leqslant 6\pi$$

$$\Leftrightarrow 31\pi \leqslant -k\times 12\pi \leqslant 43\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{31}{12} \geqslant k \geqslant -\frac{43}{12}$$

On fait bien attention aux signes

On en déduit que $k = -3$

- $\dfrac{-37\pi}{6}+3\times 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$,

Cela correspond à la valeur $-\dfrac{\pi}{6}$ dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$.

- $\cos\left(\dfrac{-37\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{11\pi}{6}-3\times 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\dfrac{-37\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{11\pi}{6}-3\times 2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

On pourrait donc aussi rédiger cette manière :

- $\cos\left(\dfrac{-37\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\dfrac{-37\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

EXERCICE N°2 *Les bonnes réponses : pas plus, pas moins* RETOUR À L'EXERCICE

1) Résoudre sur $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation $\dfrac{2\cos(x)}{\sqrt{3}} > 1$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \frac{2\cos(x)}{\sqrt{3}} > 1$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \left]\frac{-\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[}$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2\cos(x)}{\sqrt{3}} > 1$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow \frac{2\cos(x)}{\sqrt{3}} > 1$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left]\frac{-\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{-\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[}$

3) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'inéquation $2(\sin(x)+1) \leqslant \dfrac{\sqrt{12}}{2}+2$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow 2(\sin(x)+1) \leqslant \frac{\sqrt{12}}{2}+2$$
$$\Leftrightarrow 2\sin(x)+\cancel{2} \leqslant \frac{\sqrt{12}}{2}+\cancel{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{\sqrt{4\times 3}}{2\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[}$

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $2(\sin(x)+1) \leqslant \dfrac{\sqrt{12}}{2}+2$.

Notons S l'ensemble des solutions, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow 2(\sin(x)+1) \leqslant \frac{\sqrt{12}}{2}+2$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{\sqrt{4\times 3}}{2\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in \left[0+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ 2\pi+2k\pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[0+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ 2\pi+2k\pi\right[}$

EXERCICE N°3 Une étude de fonction

RETOUR À L'EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\cos(x)}$.

1) On note C_f la courbe représentative de f.

1.a) Montrer que f est paire et 2π-périodique. Interpréter graphiquement.

▪ Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f(-x) = e^{\cos(-x)} = e^{\cos(x)} = f(x)$

donc :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

Ainsi f est paire.

▪ Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f(x+2\pi) = e^{\cos(x+2\pi)} = e^{\cos(x)} = f(x)$

donc :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$

Ainsi f est 2π-périodique.

1.b) En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.

La 2π-périodicité restreint l'étude à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$, ensuite la parité restreint encore l'étude à intervalle à $[0\ ;\ \pi]$.

2) Pour cette question, on étudiera f sur l'intervalle $I = [-\pi\ ;\ \pi[$. On admet que f est dérivable de dérivée $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$.

2.a) Résoudre l'inéquation $-\sin(x) > 0$.

Pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$,

$-\sin(x) > 0 \Leftrightarrow \sin(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\pi\ ;\ 0[$

2.b) Montrer que f est croissante sur $[-\pi\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ \pi[$. En déduire les extrema locaux de f sur I.

Dressons un tableau de signes la dérivée combiné au tableau de variations de la fonction :

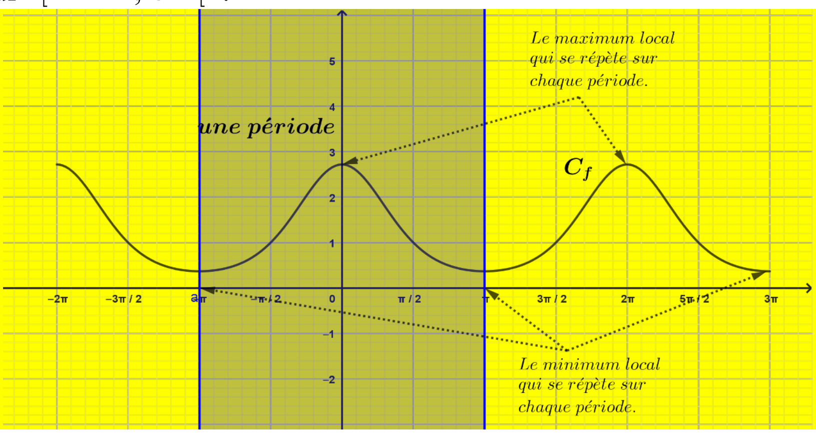
▫ $-\sin(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\pi\ ;\ 0[$

▫ $e^{(\cos(x))}$ est toujours strictement positif (propriété de la fonction Exponentielle)

x	$-\pi$		0		π
$-\sin(x)$		+	0	−	
$e^{(\cos(x))}$		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	e^{-1}	↗	e	↘	e^{-1}

On en déduit que f admet un maximum local valant e en $x = 0$ et un minimum local valant e^{-1} en $x = -\pi$.

3) Tracer C_f sur $[-2\pi\ ;\ 3\pi[$.



EXERCICE N°4 ***Des équations et des inéquations plus complexes*** RETOUR À L'EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $[-\pi\ ;\ \pi[$ par :

$$f(x) = 4\cos^2(x)+2(\sqrt{2}-1)\cos(x)-\sqrt{2}.$$

Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de l'inéquation $f(x) > 0$.

1) On pose $X = \cos(x)$.

1.a) Montrer que $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

C'est une propriété du cours :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
en particulier sur $[-\pi\ ;\ \pi[$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
et donc $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

1.b) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} = 0$.

Pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$, et $X = \cos(x) \in [-1\ ;\ 1[$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 4\cos^2(x)+2(\sqrt{2}-1)\cos(x)-\sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

1.c) Résoudre sur $[-1\ ;1]$ l'équation $4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} = 0$. (On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues).

Posons

$$\begin{aligned} \Delta &= (2(\sqrt{2}-1))^2-4\times4\times(-\sqrt{2}) \\ &= 4(2-2\sqrt{2}+1)+16\sqrt{2} \\ &= 4(2-2\sqrt{2}+1+4\sqrt{2}) \\ &= 4(2+2\sqrt{2}+1) = \\ &= 4(\sqrt{2}+1)^2 \\ &= (2(\sqrt{2}+1))^2 \end{aligned}$$

le discriminant de cette équation. $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{(2(\sqrt{2}+1))^2}}{2\times4} = \frac{-2(\sqrt{2}-1)-2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{-2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{(2(\sqrt{2}+1))^2}}{2\times4} = \frac{-2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

1.d) En déduire les solutions sur $[-\pi\ ;\ \pi[$ de l'équation $f(x) = 0$.

D'après les questions 1b) et 1c), pour $x \in [-\pi\ ;\ \pi[$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \right)$$

Résolvons séparément ces deux dernières équations :

- $$\begin{aligned} \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-3\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \cos(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right\} \end{aligned}$$

On en déduit que l’ensemble des solutions est $\left\{\frac{-3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}$

2) On pose $X = \cos(x)$.

2.a) Résoudre sur $[-1\,;\,1]$ l'inéquation $4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} > 0$.

▪ Avec les notations de la question 1b) , on peut écrire pour $X \in [-1\,;\,1]$ que :

$$4X^2+2(\sqrt{2}-1)X-\sqrt{2} = 4(X-X_1)(X-X_2) = 4\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)$$

▪ Dressons un tableau des signes :

▫ 4 est un nombre positif

▫ $X+\frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Leftrightarrow X > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

▫ $X-\frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow X > \frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
4		$+$		$+$		$+$	
$X+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$X-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$4\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▪ On en déduit que l’ensemble des solutions est : $\left[-1\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,1\right]$

2.b) En déduire les solutions sur $[-\pi\,;\,\pi[$ de l'inéquation $f(x) > 0$.

Pour $x \in [-\pi\,;\,\pi[$,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) \in \left[-1\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,1\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(-1 \leqslant \cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} < \cos(x) \leqslant 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} < \cos(x) \right)$$ (Relisez vos propriétés fondamentales)

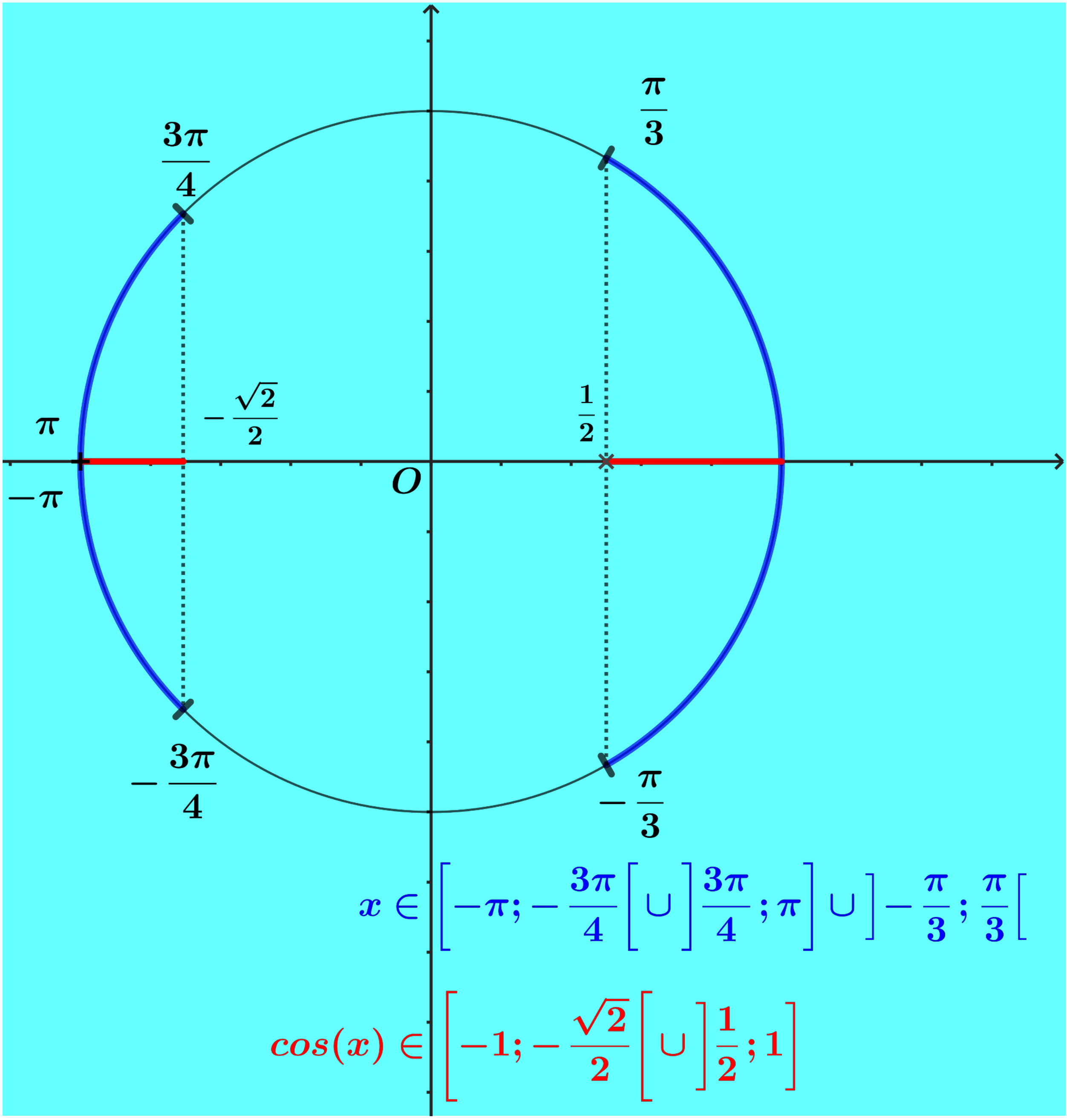
▪ Résolvons séparément ces deux inéquations.

▫ $\cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}\,;\,\pi\right[$

▫ $\cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$

▪ On en déduit que l’ensemble des solutions est $\left[\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}\,;\,\pi\right[\cup \left]\frac{-\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$

Vous avez toujours intérêt à faire un cercle au brouillon (voir la page suivante) afin de visualiser ce que vous faites.


$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\pi$
O
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{3}$
$x \in \left[-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}; \pi\right] \cup \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$
$cos(x) \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 1\right]$