TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS M03

EXERCICE N°1 Appréhender les fonctions sinus et cosinus

VOIR LE CORRIGÉ

Donner le signe des nombres suivants.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ **2)** $\sin\left(\frac{13\pi}{20}\right)$ **3)** $\cos\left(-\frac{9\pi}{11}\right)$ **4)** $\sin\left(\frac{37\pi}{20}\right)$

EXERCICE N°2 Premières équations trigonométriques

VOIR LE CORRIGÉ

1) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE N°3 Première inéquations trigonométriques

VOIR LE CORRIGÉ

1) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation : $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation : $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE N°4 Se familiariser avec la courbe de la fonction cosinus

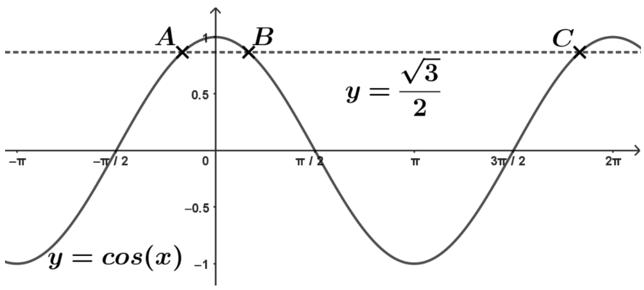
VOIR LE CORRIGÉ

1) Donner les abscisses des points A et B.

2) Résoudre graphiquement sur $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Résoudre graphiquement sur $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'inéquation $\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Déduire de l'abscisse du point A celle du point C.



EXERCICE N°5 Appréhender la périodicité

VOIR LE CORRIGÉ

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est T-périodique.

La fonction	*La période T*	*La fonction*	*La période T*
1) $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$	$T=1$	**2)** $f : x \mapsto \frac{3}{5}\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$	$T=\frac{\pi}{2}$
3) $f : x \mapsto \cos(5x)$	$T=\frac{2\pi}{5}$	**4)** $f : x \mapsto \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3x-5}{4}\right)$	$T=\frac{8\pi}{3}$

EXERCICE N°6 Utiliser la périodicité… et Python

VOIR LE CORRIGÉ

On considère l'algorithme ci-contre écrit en langage Python.

```python
def restediveuclide(a,b):
    while a>b :
        a = a - b
    return a
```

1) Que calcule cet algorithme ?

2) Calculer **`restediveuclide(97,4)`**

3) Calculer **`restediveuclide(53,4)`** et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{53\pi}{2}\right)$ et de $\sin\left(\frac{53\pi}{2}\right)$.

TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS M03C

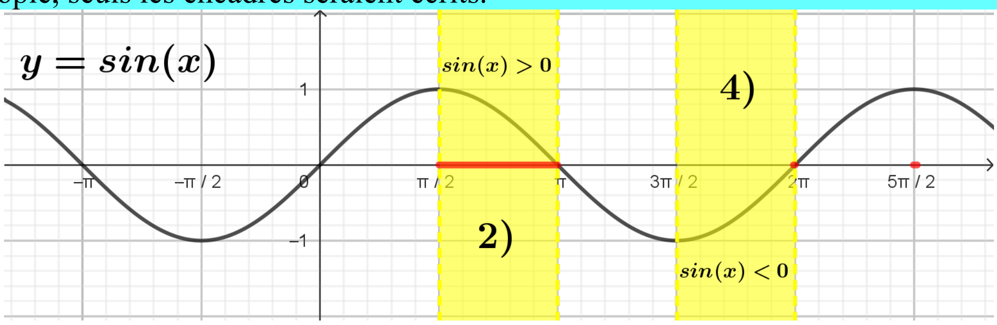
EXERCICE N°1 Appréhender les fonctions sinus et cosinus

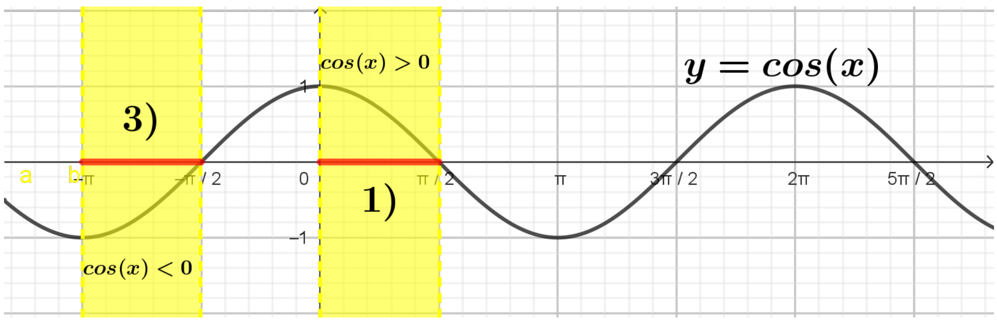
RETOUR À L'EXERCICE

Donner le signe des nombres suivants.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$	**2)** $\sin\left(\frac{13\pi}{20}\right)$	**3)** $\cos\left(-\frac{9\pi}{11}\right)$	**4)** $\sin\left(\frac{37\pi}{20}\right)$
$0\pi < \frac{1}{9}\pi < \frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi < \frac{13}{20}\pi < 1\pi$	$-1\pi < \frac{-9}{11}\pi < -\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < \frac{37}{20}\pi < 2\pi$
$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0}$	$\boxed{\sin\left(\frac{13\pi}{20}\right) > 0}$	$\boxed{\cos\left(-\frac{9\pi}{11}\right) < 0}$	$\boxed{\sin\left(\frac{37\pi}{20}\right) < 0}$

Sur une copie, seuls les encadrés seraient écrits.





Vous devez avoir une image mentale des deux courbes.
Retenez que :
« *cosinus passe par 1* » et que « *sinus s'obtient en décalant cosinus de* $\frac{\pi}{2}$ *vers la droite*»

EXERCICE N°2 *Premières équations trigonométriques*

RETOUR À L'EXERCICE

1) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

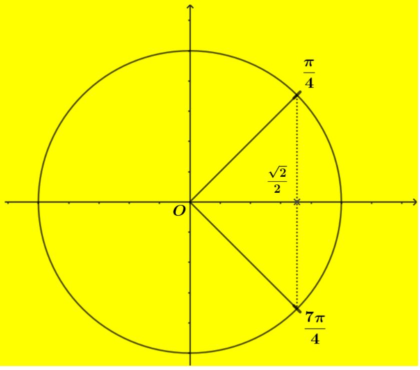
On sait que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et par symétrie que , $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Notons alors S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\right\}$$



Ainsi $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

2) Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation : $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

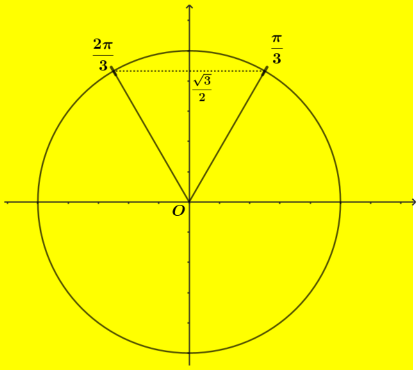
On sait que : $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et par symétrie que , $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Notons alors S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right\}$$



Ainsi $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right\}}$

EXERCICE N°3 *Première inéquations trigonométriques*

RETOUR À L'EXERCICE

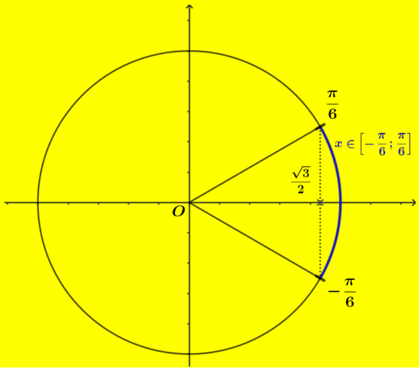
1) Résoudre dans $[-\pi \; ; \; \pi[$ l'inéquation : $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [-\pi \; ; \; \pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6}\right]$$

Ainsi, $\boxed{S = \left[\frac{-\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6}\right]}$



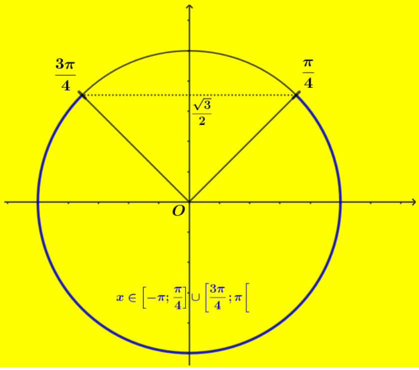
2) Résoudre dans $[-\pi \; ; \; \pi[$ l'inéquation : $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in [-\pi \; ; \; \pi[$,

$$x \in S \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

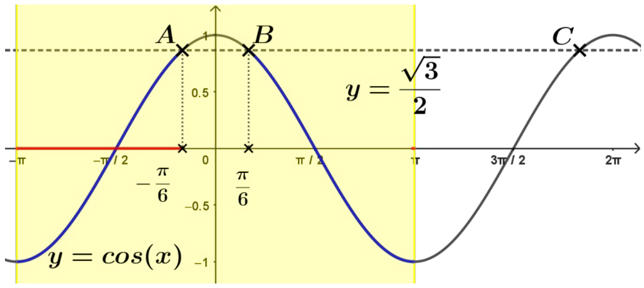
$$\Leftrightarrow x \in \left[-\pi \; ; \; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} \; ; \; \pi\right[$$

Ainsi, $\boxed{S = \left[-\pi \; ; \; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} \; ; \; \pi\right[}$



EXERCICE N°4 *Se familiariser avec la courbe de la fonction cosinus*

RETOUR À L'EXERCICE



1) Donner les abscisses des points A et B .

Sur le graphique, A et B sont sur la courbe $y = \cos(x)$ au niveau de $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sur [-π ; π[. Grâce aux valeurs remarquables :

$\boxed{x_A = -\frac{\pi}{6}}$ et $\boxed{x_B = \frac{\pi}{6}}$

2) Résoudre graphiquement sur $[-\pi ; \pi[$ l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les points A et B sont les seuls points d'intersection de la courbe et de la droite dont l'abscisse appartient à $[-\pi ; \pi[$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right\}}$

3) Résoudre graphiquement sur $[-\pi ; \pi[$ l'inéquation $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les **points de la courbe situés au dessus de la droite** et dont l'abscisse appartient à $[-\pi ; \pi[$ sont ceux dont l'abscisse appartient à $\left[-\pi ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} ; \pi\right[$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left[-\pi ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} ; \pi\right[}$

4) Déduire de l'abscisse du point A celle du point C .

Le point C a la même ordonnée que A et la fonction cosinus est 2π-périodique . On en déduit que $x_C = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$ c'est à dire $\boxed{x_C = \frac{11\pi}{6}}$.

EXERCICE N°5 *Appréhender la périodicité* RETOUR À L'EXERCICE

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, est T-périodique.

La fonction	*La période* T	*La fonction*	*La période* T
1) $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$	$T = 1$	**2)** $f : x \mapsto \frac{3}{5}\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$	$T = \frac{\pi}{2}$
3) $f : x \mapsto \cos(5x)$	$T = \frac{2\pi}{5}$	**4)** $f : x \mapsto \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3x-5}{4}\right)$	$T = \frac{8\pi}{3}$

1)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = \sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \; , \; f(x+1) = f(x)$$

Donc f est bien 1-périodique .

2)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}\sin\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}\sin\left(4x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \; , \; f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{\pi}{2}$-périodique .

3)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \cos(5x+2\pi) = \cos(5x) = f(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \; , \; f\left(x+\frac{2\pi}{5}\right) = f(x)$$

Donc f est bien $\frac{2\pi}{5}$-périodique .

4)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{8\pi}{3}\right) &= \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3\left(x+\frac{8\pi}{3}\right)-5}{4}\right) \\ &= \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3x+24\pi-5}{4}\right) \\ &= \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3x-5}{4}+6\pi\right) \\ &= \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3x-5}{4}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \; , \; f\left(x+\frac{8\pi}{3}\right) = f(x)$

Donc f est bien $\frac{8\pi}{3}$-périodique .

EXERCICE N°6 Utiliser la périodicité… et Python

RETOUR À L'EXERCICE

On considère l'algorithme ci-contre écrit en langage Python.

```python
def restediveuclide(a,b):
    while a>b :
        a = a - b
    return a
```

1) Que calcule cet algorithme ?

Cette fonction renvoie le reste de la division euclidienne de a par b .

2) Calculer `restediveuclide(97,4)`

On obtient : $\boxed{1}$

3) Calculer `restediveuclide(53,4)` et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{53\pi}{2}\right)$ et de $\sin\left(\frac{53\pi}{2}\right)$.

On obtient : $\boxed{1}$

On en déduit qu'il existe un entier k tel que :

$53 = k\times 4+1$

On peut même préciser que $k = 13$.

En multipliant chaque membre par $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{53\pi}{2} = 13\times 4\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = 13\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$$

Enfin ,

$$\cos\left(\frac{53\pi}{2}\right) = \cos\left(13\times 4\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

et

$$\sin\left(\frac{53\pi}{2}\right) = \sin\left(13\times 4\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$