VARIABLES ALÉATOIRES M03

EXERCICE N°1 Linéarité de l'espérance

VOIR LE CORRIGÉ

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -5 ; -3 ; 20 et 50 , et telle que $E(Y) = 7$.

1) Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 10Y - 20$.

1.a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

1.b) Déterminer $E(Z)$.

2) Soit la variable aléatoire R telle que $R = -5Y + 15$.

2.a) Quelles valeurs peut prendre R ?

2.b) Déterminer $E(R)$.

EXERCICE N°2 Linéarité de l'espérance : du concret

VOIR LE CORRIGÉ

Une entreprise compte 100 employés. Le tableau de répartition des salaires est le suivant.

Salaire en euros	1 500	1 700	2 200	3 000
Nombre de personnes	40	35	24	1

Le directeur prend au hasard le bulletin de salaire de l'un de ses employés. On note X la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort.

1) Calculer $E(X)$.

2) Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 10 €. Que devient alors l'espérance ?

3) Finalement, au lieu d'augmenter tous les salaires de 10 €, il les augmente de 2 %. Comment évolue l'espérance ?

VARIABLES ALÉATOIRES M03C

EXERCICE N°1 Linéarité de l'espérance

RETOUR À L'EXERCICE

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -5 ; -3 ; 20 et 50 , et telle que $E(Y) = 7$.

1) Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 10Y-20$.

1.a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

Z peut prendre les valeurs : $\boxed{-70 \text{ ; } -50 \text{ ; } 180 \text{ et } 480}$

$-70 = 10\times(-5)-20$, $-50 = 10\times(-3)-20$, $180 = 10\times20-20$, $480 = 10\times50-20$

1.b) Déterminer $E(Z)$.

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(10Y-20) = 10E(Y)-20 = 10\times7-20$$

$$\boxed{E(Z) = 50}$$

Bien sûr qu'il est possible de calculer directement $E(Z)$ mais quelle perte d'énergie !

2) Soit la variable aléatoire R telle que $R = -5Y+15$.

2.a) Quelles valeurs peut prendre R ?

R peut prendre les valeurs : $\boxed{40 \text{ ; } 30 \text{ ; } -85 \text{ et } -235}$

2.b) Déterminer $E(R)$.

Par linéarité de l'espérance,

$$E(R) = E(-5Y+15) = -5E(Y)+15 = -5\times7+15$$

$$\boxed{E(R) = -20}$$

EXERCICE N°2 *Linéarité de l'espérance : du concret*

RETOUR À L'EXERCICE

Une entreprise compte 100 employés. Le tableau de répartition des salaires est le suivant.

Salaire en euros	1 500	1 700	2 200	3 000	Total
Nombre de personnes	40	35	24	1	100

Le directeur prend au hasard le bulletin de salaire de l'un de ses employés. On note X la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort.

1) Calculer $E(X)$.

Commençons par donner la loi de probabilité de X :

x_i	1500	1700	2200	3000	Total
$P(\{X = x_i\})$	0,4	0,35	0,24	0,01	1

$$E(X) = 0{,}4\times1500 + 0{,}35\times1700 + 0{,}24\times2200 + 0{,}01\times3000$$
$$= 600 + 595 + 528 + 30$$
$$\boxed{E(X) = 1753}$$

Avouez que vous avez utilisé la calculatrice…

2) Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 10 €. Que devient alors l'espérance ?

Par linéarité de l'espérance, $E(X)$ augmente de 10.

Donc elle passe à $\boxed{1763}$.

Autre rédaction :

Posons $Y = X+10$,

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = E(X+10)\ E(X)+10 = 1753+10$$
$$\boxed{E(Y) = 1763}$$

3) Finalement, au lieu d'augmenter tous les salaires de 10 €, il les augmente de 2 %. Comment évolue l'espérance ?

Augmenter une quantité revient à la multiplier par $1{,}02$.

Par linéarité de l'espérance, $E(X)$ est multipliée par $1{,}02$.

Donc elle passe à $\boxed{1788{,}06}$

Autre rédaction :

Augmenter une quantité revient à la multiplier par $1{,}02$.

Posons $Z = X\times1{,}02$,

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(1{,}02\,X) = 1{,}02\,E(X) = 1{,}02\times1753$$
$$\boxed{E(Y) = 1788{,}06}$$