VARIABLES ALÉATOIRES M02

EXERCICE N°1 *Déterminer l'espérance* VOIR LE CORRIGÉ

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	2	9
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$

Déterminer $E(X)$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par . $Y = X - 0{,}4$

2.a) Donner sa loi de probabilité.

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (***On dit alors que la variable aléatoire est centrée***)

2.c) Selon vous, est-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

EXERCICE N°2 *Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)* VOIR LE CORRIGÉ

Extrait du déclic 1er 77 p 362

A l'occasion de la fête des mères, un site internet de livraison de fleurs propose 4 types de bouquets :

Le bouquet « tendresse » à 29,90 €, le bouquet « sentiment » à 34,90 €, le bouquet « joie » à 39,90€ et le bouquet « amour » à 48,90 €.

Le responsable des ventes estime que 15% des clients choisissent le bouquet « tendresse », 35% le bouquet « sentiment » , 40% le bouquet « joie » et 10% le bouquet « amour ».

1) Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire D représentant la dépense d'un client choisi au hasard, en euros.

2) Calculer l'espérance de D . Interpréter le résultat.

3) Le site espère recevoir 80 commandes de bouquets. Quelle est la recette totale espérée ?

EXERCICE N°3 *Utiliser l'espérance* VOIR LE CORRIGÉ

Extrait du déclic 1er 78 p 362

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu un jeu. Une partie est organisée selon les règles suivantes : On mise 3 € puis on lance un dé cubique équilibré.

- Pour la sortie du 6 on reçoit 10 €.
- Pour celle du 5 reçoit 4 €.
- Pour celle du 4 on reçoit 1€ .
- Dans les autres cas on ne reçoit rien.

1) On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique sur une partie, en euro.

1.a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

1.b) Établir la loi de probabilité de X .

1.c) Calculer l'espérance de X .

1.d) Le comité prévoit la réalisation de 150 parties lors de cette fête. Quel bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

2) Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable. La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée. Déterminer cette nouvelle mise qui rend le jeu équitable.

EXERCICE N°1 Déterminer l'espérance

RETOUR À L'EXERCICE

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-6	-3	0	2	9
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$

Déterminer $E(X)$

$E(X) = -6\times0{,}3 + (-3)\times0{,}1 + 0\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{5} + 9\times\frac{7}{30}$

$E(X) = -1{,}8 + (-0{,}3) + 0 + 0{,}4 + 2{,}1$

$\boxed{E(X) = 0{,}4}$

2) On considère à présent la variable aléatoire Y , définie par $Y = X-0{,}4$.

2.a) Donner sa loi de probabilité.

y_i	$\underbrace{-6{,}4}_{=-6-0{,}4}$	$\underbrace{-3{,}4}_{=-3-0{,}4}$	$\underbrace{-0{,}4}_{=0-0{,}4}$	$\underbrace{1{,}6}_{=2-0{,}4}$	$\underbrace{8{,}6}_{=9-0{,}4}$
$P(Y = y_i)$	0,3	0,1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$

2.b) Montrer que $E(Y) = 0$. (***On dit alors que la variable aléatoire est centrée***)

$E(Y) = -6{,}4\times0{,}3 + (-3{,}4)\times0{,}1 + -0{,}4\times\frac{1}{6} + 1{,}6\times\frac{1}{5} + 8{,}6\times\frac{7}{30}$

$E(Y) = (-6-0{,}4)\times0{,}3 + (-3-0{,}4)\times0{,}1 + (0-0{,}4)\times\frac{1}{6} + (2-0{,}4)\times\frac{1}{5} + (9-0{,}4)\times\frac{7}{30}$

Tiens tiens $-0{,}25$ revient souvent...

$E(Y) = \underbrace{-6\times\frac{1}{12} + (-3)\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{5}{24} + 4\times\frac{1}{4} + 6\times\frac{1}{8}}_{E(X)} - 0{,}25\times\underbrace{\left[0{,}3+0{,}1+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{7}{30}\right]}_{\text{somme des probablités des issues ...}}$

$E(Y) = E(X)-0{,}4$

$E(Y) = 0{,}4-0{,}4$

$E(Y) = 0$

2.c) Selon vous, est-il possible de s'épargner les calculs précédents ?

La réponse attendue est bien sûr oui mais la justification demande un peu de travail et c'est ce qui motive la propriété n°1.

EXERCICE N°2 *Interpréter l'espérance (calculatrice autorisée)*

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du déclic 1er 77 p 362

A l'occasion de la fête des mères, un site internet de livraison de fleurs propose 4 types de bouquets :
Le bouquet « tendresse » à 29,90 €, le bouquet « sentiment » à 34,90 €, le bouquet « joie » à 39,90€ et le bouquet « amour » à 48,90 €.
Le responsable des ventes estime que 15% des clients choisissent le bouquet « tendresse », 35% le bouquet « sentiment » , 40% le bouquet « joie » et 10% le bouquet « amour ».

1) Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire D représentant la dépense d'un client choisi au hasard, en euros.

▪ On détermine l'univers Ω .
$\Omega = \{tendresse\,, sentiment\,, joie\,, amour\}$
▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	« tendresse »	« sentiment »	« joie »	« amour »	Total
Probabilité	$\frac{15}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{10}{100}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par D (autrement dit : on détermine $D(\Omega)$)
$D(\{tendresse\}) = 29{,}9$, $D(\{sentiment\}) = 34{,}9$,
$D(\{joie\}) = 39{,}9$ et $D(\{amour\}) = 48{,}9$
(Il y a quatre images possibles : $29{,}9$; $34{,}9$; $39{,}9$ et $48{,}9$)
▪ On regroupe les antécédents :
Ici c'est immédiat...
▪ On calcule la probabilité de chaque événement :
C'est immédiat aussi...

Le plus gros du travail est fait au brouillon

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

d_i	29,90	34,90	39,90	48,90
$P(D = d_i)$	$\frac{15}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{10}{100}$

2) Calculer l'espérance de D . Interpréter le résultat.

$$E(D) = \sum_{i=1}^{4} d_i \times P(D = d_i)$$
$$= 29{,}90 \times \frac{15}{100} + 34{,}90 \times \frac{35}{100} + 39{,}90 \times \frac{40}{100} + 48{,}90 \times \frac{10}{100}$$
$$\boxed{E(D) = 37{,}55}$$

Cela signifie qu' $\boxed{\text{on peut espérer qu'en moyenne, une commande rapporte } 37{,}55 \text{ €}}$.

3) Le site espère recevoir 80 commandes de bouquets. Quelle est la recette totale espérée ?

$80 \times E(D) = 80 \times 37{,}55 = 3004$
On en déduit que $\boxed{\text{le montant de la recette espérée est } 3004 \text{ €}}$.

VARIABLES ALÉATOIRES M02C

EXERCICE N°3 Utiliser l'espérance RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du déclic 1er 78 p 362

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu un jeu. Une partie est organisée selon les règles suivantes : On mise 3 € puis on lance un dé cubique équilibré.

- Pour la sortie du 6 on reçoit 10 €.
- Pour celle du 5 reçoit 4 €.
- Pour celle du 4 on reçoit 1€ .
- Dans les autres cas on ne reçoit rien.

1) On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique sur une partie, en euro.

1.a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

Les valeurs prises par X sont : $-3\ ;\ -2\ ;\ 1$ et 7

1.b) Établir la loi de probabilité de X .

- On détermine l'univers Ω .

$\Omega=\{1\ ;\ 2\ ;3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

$X(\{1\}) = -3$, $X(\{2\}) = -3$, $X(\{3\}) = -3$,

$X(\{4\}) = -2$

$X(\{5\}) = 1$

$X(\{7\}) = 7$

(Il y a quatre images possibles : $-3\ ;\ -2\ ;\ 1$ et 7)

Le plus gros du travail est fait au brouillon

- On regroupe les antécédents :

$\{X = -3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$

$\{X = -2\} = \{4\}$, $\{X = 1\} = \{5\}$ et $\{X = 7\} = \{6\}$

- On calcule la probabilité de chaque événement :

$$P(\{X = -3\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{X = -2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{X = 1\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{X = 7\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-3	-2	1	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1.c) Calculer l'espérance de X .

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) + x_4 \times P(X = x_4) \\ &= -3 \times \frac{1}{2} + (-2) \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{7}{6} \\ &= -\frac{9}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{7}{6} \\ &= -\frac{3}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = -\frac{1}{2}}$$

1.d) Le comité prévoit la réalisation de 150 parties lors de cette fête. Quel bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

En moyenne pour une partie, un joueur perdra 0,50 € donc le comité gagnera 0,50 €.

$150 \times 0{,}5 = 75$

Ainsi, pour 150 parties, $\boxed{\text{le comité peut espérer gagner } 75 \text{ €}}$

2) Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable. La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée. Déterminer cette nouvelle mise qui rend le jeu équitable.

Notons m la nouvelle mise et Y la variable aléatoire donnant le nouveau gain.

Sa loi de probabilité est :

y_i	$-m$	$1-m$	$4-m$	$10-m$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que $E(Y) = 0$

Or :

$$\begin{aligned} E(Y) &= y_1 \times P(Y = y_1) + y_2 \times P(Y = y_2) + y_3 \times P(Y = y_3) + x_4 \times P(Y = y_4) \\ &= -m \times \frac{1}{2} + (1-m) \times \frac{1}{6} + (4-m) \times \frac{1}{6} + (10-m) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{-3m}{6} + \frac{1-m}{6} + \frac{4-m}{6} + \frac{10-m}{6} \\ &= \frac{-3m+1-m+4-m+10-m}{6} \\ &= \frac{15-6m}{6} \end{aligned}$$

$$E(Y) = 0 \Leftrightarrow \frac{15-6m}{6} = 0 \Leftrightarrow 15-6m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

Ainsi, $\boxed{\text{la nouvelle mise est } 2{,}50 \text{ €}}$.