VARIABLES ALÉATOIRES M01

EXERCICE N°1 Méthode : Déterminer une loi de probabilité VOIR LE CORRIGÉ

Voici un jeu :
Dans une urne comportant 6 boules numérotées de 1 à 6
On tire une boule on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on gagne 20 euros.
- Si le résultat est strictement supérieur à « 4 » on perd cinq euros.
- Si le résultat est « 3 » on perd deux euros.
- Sinon « 3 » on gagne un euro.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X .

EXERCICE N°2 Déterminer une loi de probabilité (plus difficile) VOIR LE CORRIGÉ

On considère une urne comportant des boules de couleur verte, jaune ou bleue et sur lesquelles sont inscrites des motifs (croix ou triangle). Il y a 80 boules dans l'urne dont 10 sont vertes avec des croix. La composition globale de l'urne est donnée par le tableau suivant.

	Verte	Jaune	Bleue	Total
Croix	10	30	12	52
Triangles	10	10	8	28
Total	20	40	20	80

On mise 100 € puis on tire au hasard une boule dans l'urne.
On gagne :
200 € si c'est une boule verte avec des croix,
150 € si c'est une boule verte avec des triangles,
120 € si c'est une boule bleue avec des croix,
et on ne gagne rien dans tous les autres cas.
Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y modélisant la situation.

EXERCICE N°3 Utiliser une loi de probabilité VOIR LE CORRIGÉ

On a étudié un jeu de dé et on a noté X , la variable aléatoire donnant le gain en euros. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

On n'écrit plus les accolades

x_i	0	2	3	5	7
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

Déterminer les probabilités suivantes et donner leur signification dans le contexte de l'exercice.

1) $P(X = 5)$ **2)** $P(X > 5)$ **3)** $P(X \leqslant 5)$

4) $P(X \geqslant 2)$ **5)** $P(X = 0)$ **6)** $P(0 < X < 5)$

EXERCICE N°4 Utiliser une loi de probabilité VOIR LE CORRIGÉ

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit plus les accolades

x_i	-10	-2	0	8	20
$P(X = x_i)$	$\dfrac{3}{100}$	$\dfrac{31}{50}$	…	0,07	$\dfrac{3}{20}$

1) Déterminer $P(X = 0)$.
2) Déterminer la probabilité d'obtenir moins que -2 .
3) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins -2 .
4) Déterminer la probabilité d'obtenir plus que -10 .
5) Déterminer la probabilité d'obtenir « 0 ou 8 ».

VARIABLES ALÉATOIRES M01C

EXERCICE N°1 *Méthode : Déterminer une loi de probabilité* RETOUR À L'EXERCICE

Voici un jeu :
Dans une urne comportant 6 boules numérotées de 1 à 6
On tire une boule on note le résultat obtenu.

- Si le résultat est « 1 », on gagne 20 euros.
- Si le résultat est strictement supérieur à « 4 » on perd cinq euros.
- Si le résultat est « 3 » on perd deux euros.
- Sinon « 3 » on gagne un euro.

On note X la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
Donner la loi de probabilité de X .

- On détermine Ω .

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- On détermine les images de chaque issue par X (autrement dit : on détermine $X(\Omega)$)

$X(\{1\}) = 20$, $X(\{2\}) = 1$, $X(\{3\}) = -2$,
$X(\{4\}) = 1$, $X(\{5\}) = -5$ et $X(\{6\}) = -5$

(Il y a quatre images possibles : $-5 ; -2 ; 1$ et 20)

Le plus gros du travail est fait au brouillon

- On regroupe les antécédents :

$\{X = -5\} = \{5\} \cup \{6\}$
$\{X = -2\} = \{3\}$
$\{X = 1\} = \{2\} \cup \{4\}$
$\{X = 20\} = \{1\}$

- On calcule la probabilité de chaque événement :

- $P(\{X = -5\}) = P(\{5\} \cup \{6\}) = P(\{5\})+P(\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(\{X = -2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{6}$
- $P(\{X = 1\}) = P(\{2\} \cup \{4\}) = P(\{2\})+P(\{4\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(\{X = 20\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$

- On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	-5	-2	1	20	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

EXERCICE N°2 Déterminer une loi de probabilité (plus difficile) RETOUR À L'EXERCICE

On considère une urne comportant des boules de couleur verte, jaune ou bleue et sur lesquelles sont inscrites des motifs (croix ou carré). Il y a 80 boules dans l'urne dont 10 sont vertes avec des croix. La composition globale de l'urne est donnée par le tableau suivant.

	Verte	Jaune	Bleue	Total
Croix	10	30	12	52
Carrés	10	10	8	28
Total	20	40	20	80

On mise 100 € puis on tire au hasard une boule dans l'urne.
On gagne :
200 € si c'est une boule verte avec des croix,
150 € si c'est une boule verte avec des carré,
120 € si c'est une boule bleue avec des croix,
et on ne gagne rien dans tous les autres cas.
Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y modélisant la situation.

▪ On détermine Ω .

$$\Omega = \{(Croix\,;Verte);(Croix\,;Jaune);(Croix\,;Bleue);(Carré\,;Verte);(Carré\,;Jaune);(Carré\,;Bleue)\}$$

▪ On détermine la distribution des probabilités sur Ω .

Issue	$(Croix\,;Verte)$	$(Croix\,;Jaune)$	$(Croix\,;Bleue)$	$(Carré\,;Verte)$	$(Carré\,;Jaune)$	$(Carré\,;bleue)$	Total
Probabilité	$\frac{10}{80}=\frac{1}{8}$	$\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$	$\frac{12}{80}=\frac{3}{20}$	$\frac{10}{80}=\frac{1}{8}$	$\frac{10}{80}=\frac{1}{8}$	$\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$	1

▪ On détermine les images de chaque issue par Y (autrement dit : on détermine $Y(\Omega)$)

Issue	$(Croix\,;Verte)$	$(Croix\,;Jaune)$	$(Croix\,;Bleue)$	$(Carré\,;Verte)$	$(Carré\,;Jaune)$	$(Carré\,;bleue)$
$Y(Issue)$	100 $=200-100$	-100 $=0-100$	20 $=120-100$	50 $=150-100$	-100 $=0-100$	-100 $=0-100$

(Il y a quatre images possibles : -100 ; 20 ; 50 et 100)

▪ On regroupe les antécédents :

$\{Y = -100\} = \{(Croix\,;Jaune)\} \cup \{(Carré\,;Jaune)\} \cup \{(Carré\,;bleue)\}$

$\{Y = 20\} = \{(Croix\,;Bleue)\}$

$\{Y = 50\} = \{(Carré\,;Verte)\}$

$\{X = 100\} = \{(Croix\,;Verte)\}$

▪ On calcule la probabilité de chaque événement :

$P(Y = -100) = \frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10} = \frac{3}{5}$; $P(Y = 20) = \frac{3}{20}$

$P(Y = 50) = \frac{1}{8}$; $P(X = 100) = \frac{1}{8}$

▪ On peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

y_i	-100	20	50	100	Total
$P(Y = y_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

EXERCICE N°3 ***Utiliser une loi de probabilité*** RETOUR À L'EXERCICE

On a étudié un jeu de dé et on a noté X, la variable aléatoire donnant le gain en euros. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

On n'écrit pus les accolades

x_i	0	2	3	5	7
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

Déterminer les probabilités suivantes et donner leur signification dans le contexte de l'exercice.

1) $P(X = 5)$ **2)** $P(X > 5)$ **3)** $P(X \leqslant 5)$

4) $P(X \geqslant 2)$ **5)** $P(X = 0)$ **6)** $P(0 < X < 5)$

1)

$\boxed{P(X = 5) = 0{,}45}$

La probabilité de gagner 5 euros vaut 0,45.

2)

$P(X > 5) = P(X = 7)$

car, dans cet exercice, la seule valeur strictement plus grande que « 5 » est « 7 ».

$\boxed{P(X > 5) = 0{,}14}$

La probabilité de gagner plus que 5 euros vaut 0,14.

3)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 5) &= P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) \\ &= 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}16 + 0{,}45 \\ &= 0{,}86 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(X \leqslant 5) = 0{,}86}$

Il y a mieux car $\overline{\{X \leqslant 5\}} = \{X > 5\}$ donc :

(autrement dit l'événement contraire à $\{X \leqslant 5\}$ est $\{X > 5\}$)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 5) &= 1 - P(X > 5) \\ &= 1 - 0{,}14 \\ &= 0{,}86 \end{aligned}$$

Si l'événement vous paraît compliqué alors regardez son contraire !

La probabilité de gagner au plus 5 euros vaut 0,14.

4)

On utilise « l'astuce » de la question précédente.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0{,}1 \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

$P(X \geqslant 2) = 0{,}9$

La probabilité de gagner au moins 2 euros vaut 0,9.

5)

$\boxed{P(X = 0) = 0{,}1}$

La probabilité de gagner 1 euro vaut 0,1.

6)

$$\begin{aligned} P(0 < X < 5) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0{,}15 + 0{,}16 \\ &= 0{,}31 \end{aligned}$$

$\boxed{P(0 < X < 5) = 0{,}31}$

La probabilité de gagner strictement entre 0 et 5 euros vaut 0,31.

On pourrait aussi écrire (et cela serait mieux) : La probabilité de gagner 2 ou 3 euros vaut 0,31.

EXERCICE N°4 ***Utiliser une loi de probabilité*** RETOUR À L'EXERCICE

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

On n'écrit pus les accolades

x_i	-10	-2	0	8	20
$P(X = x_i)$	$\dfrac{3}{100}$	$\dfrac{31}{50}$	…	$0{,}07$	$\dfrac{3}{20}$

1) Déterminer $P(X = 0)$.
2) Déterminer la probabilité d'obtenir moins que -2 .
3) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins -2 .
4) Déterminer la probabilité d'obtenir plus que -10 .
5) Déterminer la probabilité d'obtenir « 0 ou 8 ».

1)

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1-\left(P(X = -10)+P(X = -2)+P(X = 8)+P(X = 20)\right) \\ &= 1-\left(\frac{3}{100}+\frac{31}{50}+0{,}07+\frac{3}{20}\right) \\ &= 1-\left(\frac{3}{100}+\frac{62}{100}+\frac{7}{100}+\frac{15}{100}\right) \\ &= 1-\left(\frac{3}{100}+\frac{62}{100}+\frac{7}{100}+\frac{15}{100}\right) \\ &= 1-\frac{87}{100} \\ &= 0{,}13 \end{aligned}$$

$\boxed{P(X = 0) = 0{,}13}$

2)

Il s'agit de déterminer $P(X < -2)$.

Or :

$$P(X < -2) = P(X = -10) = \frac{3}{100} \ .$$

Ainsi $\boxed{P(X < -2) = \dfrac{3}{100}}$

On peut aussi écrire : $P(X < -2) = 0{,}03$

3)

Il s'agit de déterminer $P(X \geqslant -2)$.

Or :

$$P(X \geqslant -2) = 1-P(X < -2) = 1-\frac{3}{100} = \frac{97}{100}$$

Ainsi $\boxed{P(X \geqslant -2) = \dfrac{97}{100}}$

On peut aussi écrire : $P(X \geqslant -2) = 0{,}97$

4)

Il s'agit de déterminer $P(X > -10)$.

Or :

$$P(X > -10) = 1-P(X \leqslant -10) \underbrace{=}_{\substack{\text{car il n'y a} \\ \text{qu'une valeur}}} 1-P(X = -10) = 1-\frac{3}{100} = \frac{97}{100}$$

Ainsi $\boxed{P(X > -10) = \dfrac{97}{100}}$

On pouvait aussi écrire :

$P(X > -10) = P(X \geqslant -2)$ et c'était terminé…

5)

Il s'agit de déterminer $P(X = 0 \text{ ou } X = 8)$

$P(\{X = 0\} \cup \{X = 8\})$ serait bien aussi…

ou alors $P(0 \leqslant X \leqslant 8)$

et pourquoi pas $P(X \in [0\ ;\ 8])$

ou encore $P(-2 < X < 20)$

ou même $P(X \in]-2\ ;\ 20[)$

Une difficulté
de ce chapitre est que
l'on peut décrire
un même événement
de plusieurs façons

Or :

$$P(X = 0 \text{ ou } X = 8) = P(X = 0)+P(X = 8) = \frac{31}{50}+\frac{13}{100} = \frac{62}{100}+\frac{13}{100} = \frac{75}{100} = \frac{1}{4}$$

Ainsi : $\boxed{P(X = 0 \text{ ou } X = 8) = \frac{97}{100}}$