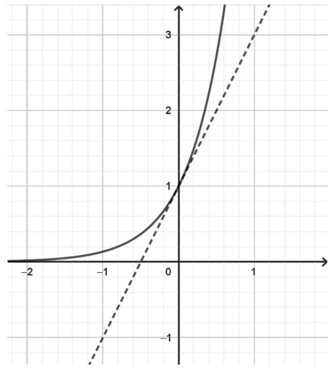
LA FONCTION EXPONENTIELLE M04

EXERCICE N°1 Avec un graphique

VOIR LE CORRIGÉ

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la courbe représentative dans un repère.
La tangente à la courbe au point $A(0\ ;\ 1)$ est la droite d (en pointillés).



1) Déterminer $f'(0)$.
2) f a une expression de la forme $f(x)=e^{kx}$.
2.a) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de x et de k.
2.b) En déduire la valeur de k.

EXERCICE N°2 Avec des suites

VOIR LE CORRIGÉ

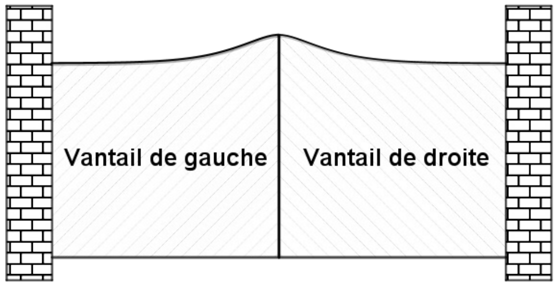
Donner la nature et la raison des suites ci-dessous.

1) (u_n) définie pour $n \in N$ par $u_n = e^{-n}$
2) (v_n) définie pour $n \in N$ par $v_n = \dfrac{1}{e^{6n}}$
3) (w_n) définie pour $n \in N$ par $w_n = 0{,}5e^{4n}$
4) (r_n) définie pour $n \in N$ par $r_n = e^{1,5}n$
5) (t_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = 7-e^{5}n$

EXERCICE N°3 Du concret : fabrication

VOIR LE CORRIGÉ

On désire réaliser un portail comme indiqué ci-contre. Chaque vantail mesure 2 m de large.



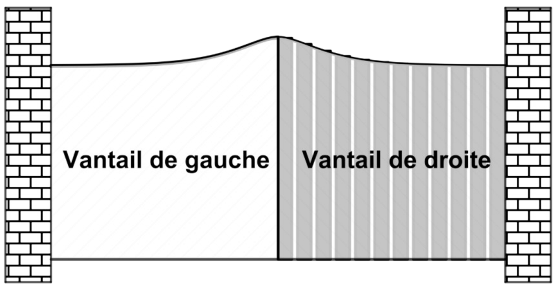
Partie A.
Modélisation de la partie supérieure du portail

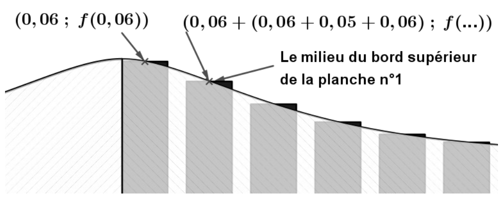
On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;2]$ par : $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)e^{-4x}+b$ où b est un nombre réel.

1) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
2) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
3) Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Partie B. Utilisation d'un programme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m.
Pour le vantail de droite, le milieu du bord supérieur de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur.
Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.
La distance entre le bas du portail et le sol est 0,05 m.





4) Donner l'aire A_k de la planche numéro k en fonction de k.

5) Recopier et compléter le programme ci-contre pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

```
from math import exp
S = 0
X = 0.06
while X + 0.17 < ... :
    S = S + ...
    X = X + ...
print(S)
```

EXERCICE N°4 Changement de variable

VOIR LE CORRIGÉ

Du classique à connaître pour la suite

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - e\,x^2 - x^2 + e\,x = 0$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

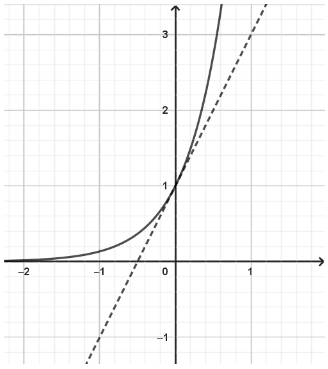
2.a) $x^6 - e\,x^4 - x^4 + e\,x^2 = 0$

2.b) $e^{3x} - e\,e^{2x} - e^{2x} + e^2 = 0$

LA FONCTION EXPONENTIELLE M04C

EXERCICE N°1 Avec un graphique

RETOUR À L'EXERCICE



f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la courbe représentative dans un repère.
La tangente à la courbe au point $A(0\ ;\ 1)$ est la droite d (en pointillés).

1) Déterminer $f'(0)$.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de d qui, graphiquement vaut 2.

Donc $\boxed{f'(0) = 2}$

2) f a une expression de la forme $f(x)=e^{kx}$.

2.a) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de x et de k.

Pour tout réel k, f est la composée d'une fonction affine $x \mapsto kx$ par la fonction exponentielle, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{f'(x) = ke^{kx}}$

2.b) En déduire la valeur de k.

$2 = f'(0) = k\,e^{k\times 0} = k$

Ainsi $\boxed{k = 2}$

EXERCICE N°2 Avec des suites

RETOUR À L'EXERCICE

Donner la nature et la raison des suites ci-dessous.

1) (u_n) définie pour $n \in N$ par $u_n = e^{-n}$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } e^{-1}}$ et de 1er terme $\boxed{u_0 = 1}$

2) (v_n) définie pour $n \in N$ par $v_n = \dfrac{1}{e^{6n}}$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } e^{-6}}$ et de 1er terme $\boxed{v_0 = 1}$

3) (w_n) définie pour $n \in N$ par $w_n = 0{,}5\,e^{4n}$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } e^{4}}$ et de 1er terme $\boxed{w_0 = 0{,}5}$

4) (r_n) définie pour $n \in N$ par $r_n = e^{1{,}5}n$

Attention à ne pas aller trop vite : $e^{1{,}5}n \neq e^{1{,}5n}$

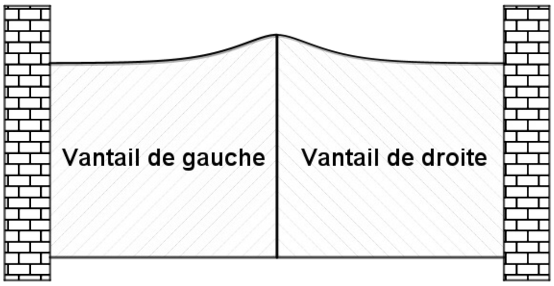
On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{arithmétique de raison } e^{1{,}5}}$ et de 1er terme $\boxed{r_0 = 0}$

5) (t_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = 7 - e^{5}n$

On reconnaît le terme général d'une $\boxed{\text{arithmétique de raison } -e^{5}}$ et de 1er terme $\boxed{t_0 = 7}$

EXERCICE N°3 Du concret : fabrication *RETOUR À L'EXERCICE*

On désire réaliser un portail comme indiqué ci-contre. Chaque vantail mesure 2 m de large.



Partie A.

Modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;2]$ par : $f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x}+b$ où b est un nombre réel.

1) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

La fonction f est composée de fonctions de référence toutes dérivables sur $[0\ ;\ 2]$ donc f l'est aussi et pour tout $x\in[0\ ;\ 2]$,

$$f'(x) = xe^{-4x}-4\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x} = [x-4x-1]e^{-4x}$$

$$\boxed{f'(x) = (-3x-1)e^{-4x}}$$

2) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

▫ $-3x-1 > 0 \Leftrightarrow -3x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$

donc $-3x-1$ est négatif sur $[0\ ;\ 2]$.

▫ $e^{-4x} > 0$ car Exponentielle est strictement négative.

Ainsi pour tout $x\in[0\ ;\ 2]$, $f'(x) < 0$

Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0\ ;\ 2]}$

3) Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Comme f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$, son maximum est atteint en 0.

Si vous relisez ceci après avoir avancé dans vos études, vous vous rendrez compte que nous passons sous silence quelques subtilités comme « l'image d'un segment par une fonction continue est segment »)

On cherche donc b pour que $f(0) = 1{,}5$

Or :

$$f(0)=\left(0+\frac{1}{4}\right)e^{-4\times0}+b = \frac{1}{4}+b$$

Ainsi,

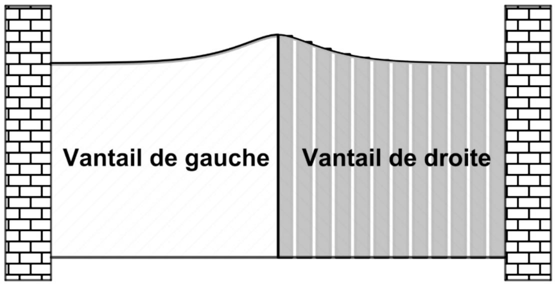
$$\frac{1}{4}+b = 0$$

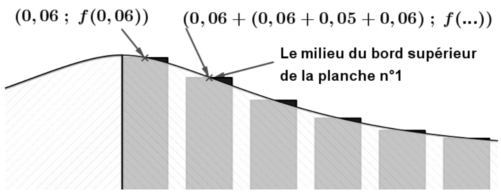
Donc

$$\boxed{b = -\frac{1}{4}}$$

Partie B. Utilisation d'un programme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m.
Pour le vantail de droite, le milieu du bord supérieur de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur.
Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.
La distance entre le bas du portail et le sol est 0,05 m.





4) Donner l'aire A_k de la planche numéro k en fonction de k.

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = \underbrace{0{,}12}_{largeur} \times \underbrace{f(0{,}06 + k \times 0{,}17)}_{hauteur}$$

$$\boxed{A_k = 0{,}12 \times (k + 0{,}25)e^{-4k}}$$

```python
from math import exp
S = 0
X = 0.06
while X + 0.17 < ... :
    S = S + ...
    X = X + ...
print(S)
```

5) Recopier et compléter le programme ci-contre pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

```python
from math import exp
S = 0
X = 0.06
while X + 0.17 < 2:
    S = S + 0.12 * (X+0.25)*exp(-4*X)-0.25
    X = X + 0.17
print(S)
```

EXERCICE N°4 *Changement de variable* RETOUR À L'EXERCICE

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3-ex^2-x^2+ex = 0$.

Notons S l'ensemble des solutions. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow x^3-ex^2-x^2+ex = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2-ex-x+e) = 0$

1 est une racine évidente de $x^2-ex-x+e$ car $1^2-e\times1-1+e = 0$

De plus, on se souvient que $x^2-ex-x+e = x^2-Sx+P$

avec $S = -e-1$ la somme des racines et $P = e$ leur produit.

Si on note x_2 la deuxième racine alors $1\times x_2 = e$ d'où $x_2 = e$

On va donc pouvoir remplacer $(x^2-ex-x+e)$ par $(x-1)(x-e)$

Si on a oublié cette méthode alors on utilise le discriminant.

Dans les deux cas, on fait les calculs au brouillon, ce qui nous évite la rédaction sur une copie…

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-e) = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = e)$

On en déduit que $S = \{0 ; 1 ; e\}$

On pense à mettre les solutions dans l'ordre croissant.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

2.a) $x^6-ex^4-x^4+ex^2 = 0$

Ici il faut remarquer (oui je sais, il faut y penser…) que cela ressemble beaucoup à la question n°1 avec juste le fait d'avoir doublé les exposants.

Or $x^{2n} = (x^2)^n$

et donc en remplaçant x^2 par X on va se retrouver avec $X^3-eX^2-X^2+eX = 0$

On a changé de variable

Posons $X = x^2$

L'équation s'écrit alors $X^3-eX^2-X^2+eX = 0$

et d'après la question n°1 cela équivaut à

$X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = e$

ou encore à

$x^2 = 0$ ou $x^2 = 1$ ou $x^2 = e$

puis à

$\overbrace{x = 0}^{x^2=0}$ ou $\overbrace{x = 1 \text{ ou } x = -1}^{x^2=1}$ ou $\overbrace{x = e \text{ ou } x = -e}^{x^2=e}$

On en déduit que l'équation $x^6-ex^4-x^4+ex^2 = 0$ admet

$\boxed{\text{cinq solutions } -e ; -1 ; 0 ; 1 \text{ et } e}$

zéro est ici une racine double.

Potentiellement, une équation comme celle-ci pourrait avoir jusqu'à 6 solutions distinctes.

2.b) $e^{3x}-e\,e^{2x}-e^{2x}+e^2 = 0$

Posons $X = e^x$

L'équation s'écrit alors $X^3-eX^2-X^2+eX = 0$

et d'après la question n°1 cela équivaut à

$X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = e$

ou encore à

$e^x = 0$ ou $e^x = 1$ ou $e^x = e$

puis à

$\overbrace{x = 0}^{e^x=1}$ ou $\overbrace{x = 1}^{e^x=e}$

($e^x = 0$ n'engendre pas de solution car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

On en déduit que l'équation $e^{3x}-e\,e^{2x}-e^{2x}+e^2 = 0$ admet $\boxed{\text{deux solutions : } 0 \text{ et } 1}$