LA FONCTION EXPONENTIELLE M03

EXERCICE N°1 Étudier les variations d'une fonction (niveau 1) VOIR LE CORRIGÉ

Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f : x \mapsto e^{-x} + e x$ **2)** $g : x \mapsto e^{3x} - 3x$ **3)** $h : x \mapsto e^{5x} - 5x + 3$

EXERCICE N°2 Étudier les variations d'une fonction (niveau 2) VOIR LE CORRIGÉ

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto (x-1)e^{x}$ avec $D = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{-2x}{e^{x}}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{-2e^{x}}{x}$ avec $D = \mathbb{R}^{*} =]-\infty \,;\, 0[\cup]0 \,;\, +\infty[$

EXERCICE N°3 Étudier les variations d'une fonction (niveau 3) VOIR LE CORRIGÉ

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^{3}}{e^{-x}}$ avec $D = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto (x^{2} - x)e^{x+1}$ avec $D = \mathbb{R}$

Ne pas avoir
peur des calculs
Ce n'est pas si dur

Aide au calcul n° 1

$$\left(\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+1} \approx 2{,}28$$

$$\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1} \approx -1{,}19$$

3) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x}}{x^{2}-1}$ avec $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 \,;\, 1\} =]-\infty \,;\, -1[\cup]-1 \,;\, 1[\cup]1 \,;\, +\infty[$

Question difficile
Ne pas se décourager !

Aide au calcul n° 2

$f(1-\sqrt{2}) = \approx -0{,}8$

$f(1+\sqrt{2}) = \approx 2{,}32$

EXERCICE N°1 Étudier le signe d'une expression (niveau 1)

RETOUR À L'EXERCICE

Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f : x \mapsto e^{-x} + e\,x$ **2)** $g : x \mapsto e^{3x} - 3x$ **3)** $h : x \mapsto e^{5x} - 5x + 3$

1)

▪ f est composée de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = -e^{-x} + e$

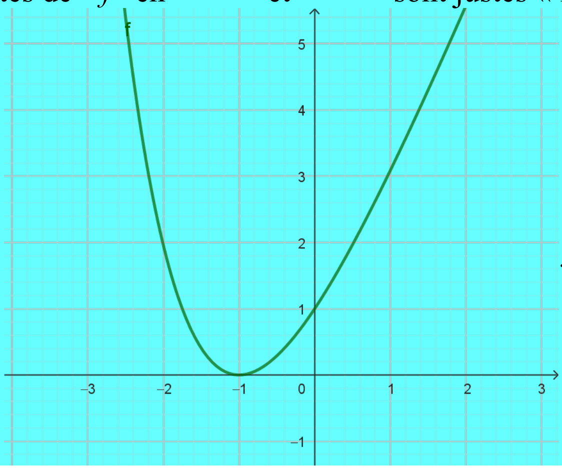
▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + e > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -e^{1} \Leftrightarrow e^{-x} < e^{1} \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(-1) = e^{-(-1)} + e \times (-1) = e - e = 0$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



$y = e^{-x} + e\,x$

2)

▪ g est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = 3e^{3x} - 3$

▪ Dressons le tableau de signes de g' pour en déduire le tableau de variations de g.

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow 3e^{3x} - 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(e^{3x} - 1\right) > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\,3>0} e^{3x} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{3x} > e^{0} \\ &\Leftrightarrow 3x > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\,3>0} x > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$g(0) = e^{3\times 0} - 3\times 0 = 1 - 0 = 1$

Cette année les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».

$y = e^{3x} - 3x$

3)

- h est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$h'(x) = 5e^{5x} - 5$

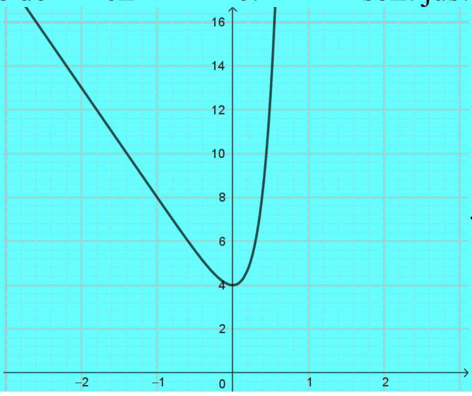
- Dressons le tableau de signes de h' pour en déduire le tableau de variations de h.

$$\begin{aligned} h'(x) > 0 &\Leftrightarrow 5e^{5x} - 5 > 0 \\ &\Leftrightarrow 5(e^{5x} - 1) > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, 5>0} e^{5x} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{5x} > e^{0} \\ &\Leftrightarrow 5x > 0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, 5>0} x > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$h(0) = e^{5\times 0} - 5\times 0 + 1 = 1 + 0 + 3 = 4$

Cette année les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



$y = e^{5x} - 5x + 3$

EXERCICE N°2 *Étudier les variations d'une fonction (niveau 2)* RETOUR À L'EXERCICE

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto (x-1)e^x$ avec $D = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{-2x}{e^x}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{-2e^x}{x}$ avec $D = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$

1)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = u(x)v(x)$

avec

$u(x) = x-1$ et $u'(x) = 1$

$v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$f'(x) = 1e^x+(x-1)e^x = xe^x$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

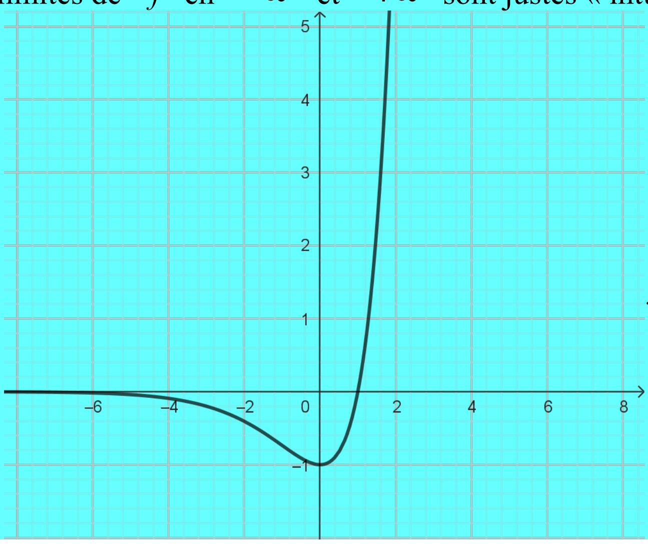
▫ $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (la bonne blague… oui mais il ne faut pas oublier que 0 va avoir son rôle)

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

$f(0) = (0-1)e^0 = -1$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



$y = (x-1)e^x$

2)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, de plus $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{-2x}{e^x} = -2xe^{-x}$$

Ainsi

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec

$u(x) = -2x$ et $u'(x) = -2$

$v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$

d'où

$$f'(x) = -2e^{-x} + (-2x) \times (-e^{-x}) = (-2+2x)e^{-x}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

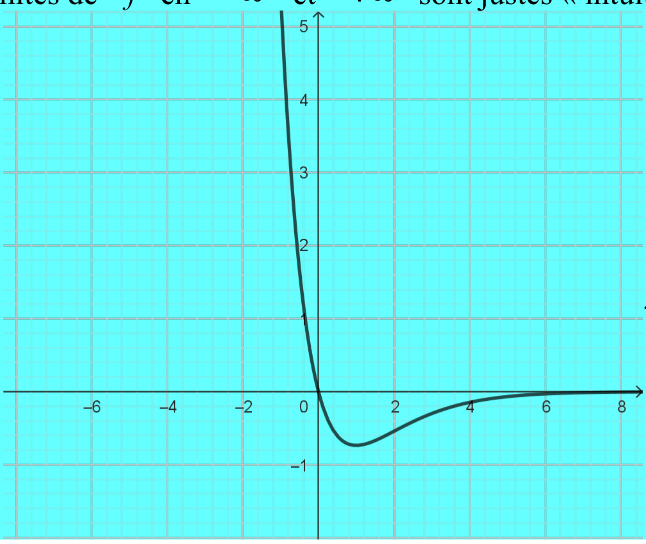
▫ $-2+2x > 0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$

▫ $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle est strictement positive)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2+2x$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	0

$f(1) = -2 \times 1 \times e^{-1} = -2e^{-1}$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



$$y = \frac{-2x}{e^x}$$

3)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}^*$, de plus $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = -2e^x$ et $u'(x) = -2e^x$

$v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

d'où

$$f'(x) = \frac{-2e^x \times x - 1 \times (-2e^x)}{x^2} = \frac{(-2x+2)e^x}{x^2}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ $-2x+2 > 0 \Leftrightarrow -2x > -2 \Leftrightarrow x < 1$

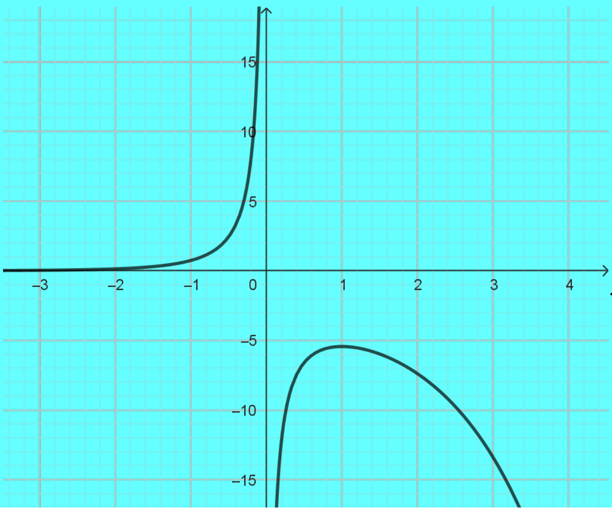
▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

▫ $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-2x-2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$0 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow$	$-2e$	$\searrow -\infty$	

$$f(1) = \frac{-2e^1}{1} = -2e$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi qu'en 0^- et 0^+ sont justes « intuitives ».



$y = \dfrac{-2e^x}{x}$

EXERCICE N°3 Étudier les variations d'une fonction (niveau 3)

RETOUR À L'EXERCICE

Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition D .

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{e^{-x}}$ avec $D = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \left(x^2 - x\right)e^{x+1}$ avec $D = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2-1}$ avec
$D = \mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$
$=]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]-1\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

1)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, de plus $x \mapsto e^{-x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{-x}} = x^3 e^x$$

Ainsi :

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec

$u(x) = x^3$ et $u'(x) = 3x^2$

$v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

d'où

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = \left(x^3 + 3x^2\right)e^x = x^2(x+3)e^x$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f .

▫ $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

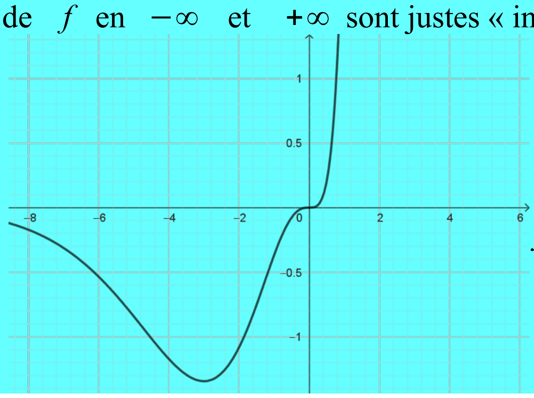
▫ $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

▫ $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{27}{e^3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{e^{-(-3)}} = -\frac{27}{e^3}$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



$$y = \frac{x^3}{e^{-x}}$$

2)

▪ f est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec

$$u(x) = x^2 - x \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x-1$$
$$v(x) = e^{x+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{x+1}$$

d'où

$$f'(x) = (2x-1)e^{x+1} + (x^2-x)e^{x+1} = (x^2+x-1)e^{x+1}$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

Commençons par factoriser $f'(x)$.

Posons $\underbrace{\Delta = 1^2 - 4\times1\times(-1)}_{\Delta = b^2-4ac} = 5$ le discriminant du trinôme x^2+x-1. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \ = (x-x_1)(x-x_2)e^{x+1}$$

▫ $x - x_1 > 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

▫ $x - x_2 > 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ici on a bien $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^{x+1}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\approx 2{,}28$	↘	$\approx -1{,}19$	↗	$+\infty$

$$f(x_1) = f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+1} \approx 2{,}28$$

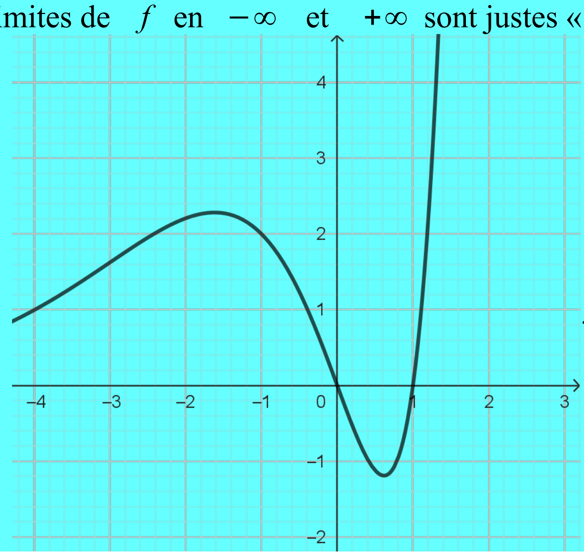
$$f(x_2) = f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1} \approx -1{,}19$$

Aide au calcul

$$\left(\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+1} \approx 2{,}28$$

$$\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1} \approx -1{,}19$$

Cette année les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont justes « intuitives ».



$$y = (x^2-x)e^{x+1}$$

3)

▪ f est un quotient de fonctions de référence dérivables sur D, de plus $x \mapsto x^{-1}$ ne s'annule pas sur D. f est donc dérivable sur D et pour tout $x \in D$:

On n'oublie pas : $D = \mathbb{R} \backslash \{-1 \; ; \; 1\} =]-\infty \; ; -1[\; \cup \;]-1 \; ; 1[\; \cup \;]1 \; ; +\infty[$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec

$u(x) = e^x$ et $u'(x) = e^x$

$v(x) = x^2 - 1$ et $v'(x) = 2x$

d'où

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)e^x - 2x e^x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$(x^2-1)^2 = [(x+1)(x-1)]^2 = (x+1)^2(x-1)^2$$

▪ Dressons le tableau de signes de f' pour en déduire le tableau de variations de f.

Commençons par factoriser $f'(x)$.

Posons $\underbrace{\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}_{\Delta = b^2 - 4ac} = 8$ le discriminant du trinôme $x^2 - 2x - 1$. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

▫ $x - x_1 > 0 \Leftrightarrow x - (1 - \sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow x > 1 - \sqrt{2}$

▫ $x - x_2 > 0 \Leftrightarrow x - (1 + \sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow x > 1 + \sqrt{2}$

▫ $(x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

▫ $(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	|	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$	|	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$\approx -0{,}8$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\approx 2{,}32$	↗	$+\infty$

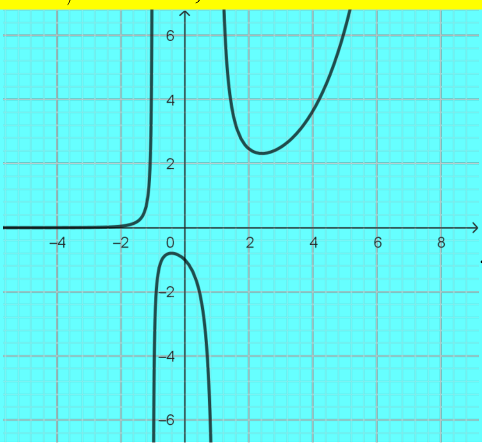
$f(x_1) = f(1 - \sqrt{2}) = \; \approx -0{,}8$

$f(x_1) = f(1 + \sqrt{2}) = \; \approx 2{,}32$

aide au calcul

$f(1 - \sqrt{2}) = \; \approx -0{,}8$

$f(1 + \sqrt{2}) = \; \approx 2{,}32$



$$y = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$