LA FONCTION EXPONENTIELLE M02

EXERCICE N°1 Résoudre une équation (niveau 0)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^x = -1$ **2)** $e^x = \dfrac{1}{e}$ **3)** $e^{2x} - e = 0$

EXERCICE N°2 Résoudre une équation (niveau 1)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{5x+3} = 1$ **2)** $e^{-4x+5} = e^{-6}$ **3)** $e - e^{x^2} = 0$

EXERCICE N°3 Résoudre une inéquation (niveau 0)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $e^x > \dfrac{1}{e}$ **2)** $e^x \leqslant -3$ **3)** $e^x < e^{-3}$

EXERCICE N°4 Résoudre une inéquation (niveau 1)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{5x+2} > 1$ **2)** $e^{-3x+7} \geqslant e^{-5}$ **3)** $e^{-2x-1} + e^{-6x-1} < 0$

EXERCICE N°5 Résoudre une équation (niveau 2)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{3x} \times e^{10x} = 1$ **2)** $\left(e^{-x}\right)^3 = e$ **3)** $\dfrac{e^{-2x}}{e^{-3}} = e$

EXERCICE N°6 Résoudre une inéquation (niveau 2)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{3x}\left(e^2 + e^{-3x}\right) > e^3 + 1$ **2)** $e^{2x+5} \leqslant e^{-2x} \times e^{-7x+2}$ **3)** $e^{2x+3}\left(-e^{2-x} + 1\right) \geqslant e^{2x+3} - e^4$

EXERCICE N°7 Résoudre une équation (niveau 3)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(3x-1)\left(e^x - 1\right) = 0$ **2)** $\left(e^{x^2-4x+4} - e^{x^2-2x+1}\right)^2 = 0$ **3)** $e^{-x}(-3x+7) = 0$

EXERCICE N°8 Résoudre une inéquation (niveau 4)

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $2e^x - 3xe^x = 0$ **2)** $-xe^{-x} - x = 0$

3) $-3e^{x^2-1} + 7xe^{x^2-1} = 0$ **4)** $3xe^{-x} + x^2e^{-x} + 2e^{-x} = 0$

EXERCICE N°1 Résoudre une équation (niveau 0)

RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^x = -1$ **2)** $e^x = \dfrac{1}{e}$ **3)** $e^{2x} - e = 0$

On utilise ici la propriété n°6

1) $e^x = -1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x = -1$

Or la fonction exponentielle est strictement positive.

Donc $\boxed{S = \emptyset}$

On utilise ici la propriété n°8

2) $e^x = \dfrac{1}{e}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Ainsi $\boxed{S = \{-1\}}$

On utilise ici la propriété n°8

3) $e^{2x} - e = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^{2x} - e = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x} = e^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

EXERCICE N°2 Résoudre une équation (niveau 1)

RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{5x+3} = 1$ **2)** $e^{-4x+5} = e^{-6}$ **3)** $e - e^{x^2} = 0$

On utilise ici la propriété n°8

1) $e^{5x+3} = 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{5x+3} = 1 \Leftrightarrow e^{5x+3} = e^{0} \Leftrightarrow 5x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{-3}{5}\right\}}$

On utilise ici la propriété n°8

2) $e^{-4x+5} = e^{-6}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{-4x+5} = e^{-2} \Leftrightarrow -4x+5 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{7}{4}\right\}}$

On utilise ici la propriété n°8

3) $e - e^{x^2} = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e - e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow e = e^{x^2} \Leftrightarrow e^{1} = e^{x^2} \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow (x=-1 \text{ ou } x=1)$$

Ainsi $\boxed{S = \{-1\ ,\ 1\}}$

EXERCICE N°3 **Résoudre une inéquation (niveau 0)** RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $e^x > \frac{1}{e}$ **2)** $e^x \leqslant -3$ **3)** $e^x < e^{-3}$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^x > \frac{1}{e}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^x > e^{-1} \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in \left]-1\,;+\infty\right[$

Ainsi $\boxed{S = \left]-1\,;+\infty\right[}$

On utilise ici la remarque n°2 et la propriété n°6

2) $e^x \leqslant -3$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x \leqslant -3$

Or la fonction exponentielle est strictement positive.

Ainsi $\boxed{S = \varnothing}$

On utilise ici la remarque n°2

3) $e^x < e^{-3}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S \Leftrightarrow e^x < e^{-3} \Leftrightarrow x < -3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;-3\right[$

Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty\,;-3\right[}$

EXERCICE N°4 Résoudre une inéquation (niveau 1)

RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{5x+2} > 1$ **2)** $e^{-3x+7} \geqslant e^{-5}$ **3)** $e^{-2x-1}+e^{-6x-1} < 0$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^{5x+2} > 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{5x+2} > 1 \Leftrightarrow e^{5x+2} > e^{0} \Leftrightarrow 5x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-2}{5}\ ;+\infty\right[$$

Ainsi $\boxed{S = \left]\frac{-2}{5}\ ;+\infty\right[}$

On utilise ici la remarque n°2

2) $e^{-3x+7} \geqslant e^{-5}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{-3x+7} \geqslant e^{-5} \Leftrightarrow -3x+7 \geqslant -5 \Leftrightarrow x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ;4\right]$$

Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty\ ;4\right]}$

On reste vigilant

On utilise ici la remarque n°2 et la propriété n°6

3) $e^{-2x-1}+e^{-6x-1} < 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{-2x-1}+e^{-6x-1} < 0$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$e^{-2x-1} > 0$ et $e^{-6x-1} > 0$

d'où

$e^{-2x-1}+e^{-6x-1} > 0$

On ne risque donc pas de trouver une solution à notre équation…

Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$

EXERCICE N°5 Résoudre une équation (niveau 2)

RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{3x} \times e^{10x} = 1$ **2)** $\left(e^{-x}\right)^3 = e$ **3)** $\dfrac{e^{-2x}}{e^{-3}} = e$

On utilise ici la propriété n°8

1) $e^{3x} \times e^{10x} = 1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow e^{3x} \times e^{10x} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{e^{3x+10x} = e^0}_{\textit{pas utile sur une copie}} \Leftrightarrow e^{13x} = e^0 \Leftrightarrow \underbrace{13x = 0}_{\textit{pas utile sur une copie}} \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

On utilise ici la propriété n°8

2) $\left(e^{-x}\right)^3 = e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S \Leftrightarrow \left(e^{-x}\right)^3 = e \Leftrightarrow e^{-3x} = e^1 \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}}$

On utilise ici la propriété n°8

3) $\dfrac{e^{-2x}}{e^{-3}} = e$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$x \in S \Leftrightarrow \frac{e^{-2x}}{e^{-3}} = e \Leftrightarrow \underbrace{e^{-2x-(-3)} = e^1}_{\textit{pas utile sur une copie}} \Leftrightarrow e^{-2x+3} = e^1 \Leftrightarrow -2x+3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Ainsi $\boxed{S = \{1\}}$

EXERCICE N°6 Résoudre une inéquation (niveau 2)

RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{3x}\left(e^{2}+e^{-3x}\right) > e^{3}+1$ **2)** $e^{2x+5} \leqslant e^{-2x}\times e^{-7x+2}$ **3)** $e^{2x+3}\left(-e^{2-x}+1\right) \geqslant e^{2x+3}-e^{4}$

On utilise ici la remarque n°2

1) $e^{3x}\left(e^{2}+e^{-3x}\right) > e^{3}+1$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & x \in S \\ \Leftrightarrow\ & e^{3x}\left(e^{2}+e^{-3x}\right) > e^{3}+1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{3x+2}+1 > e^{3}+1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{3x+2} > e^{3} \\ \Leftrightarrow\ & 3x+2 > 3 \\ \Leftrightarrow\ & x > \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[}$

On utilise ici la remarque n°2

2) $e^{2x+5} \leqslant e^{-2x}\times e^{-7x+2}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & x \in S \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x+5} \leqslant e^{-2x}\times e^{-7x+2} \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x+5} \leqslant e^{-9x+2} \\ \Leftrightarrow\ & 2x+5 \leqslant -9x+2 \\ \Leftrightarrow\ & 11x \leqslant -3 \\ \Leftrightarrow\ & x \leqslant -\frac{3}{11} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{11}\right] \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{11}\right]}$

On utilise ici la remarque n°2

3) $e^{2x+3}\left(-e^{2-x}+1\right) \geqslant e^{2x+3}-e^{4}$

Notons S l'ensemble des solutions de cette inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & x \in S \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x+3}\left(-e^{2-x}+1\right) \geqslant e^{2x+3}-e^{4} \\ \Leftrightarrow\ & -e^{x+5}+e^{2x+3} \geqslant e^{2x+3}-e^{4} \\ \Leftrightarrow\ & -e^{x+5} \geqslant -e^{4} \\ \Leftrightarrow\ & e^{x+5} \leqslant e^{4} \\ \Leftrightarrow\ & x+5 \leqslant 4 \\ \Leftrightarrow\ & x \leqslant -1 \\ \Leftrightarrow\ & x \in \left]-\infty\ ;\ -1\right] \end{aligned}$$

On reste vigilant

Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty\ ;\ -1\right]}$

EXERCICE N°7 *Résoudre une équation (niveau 3)* RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(3x-1)(e^x-1) = 0$ **2)** $\left(e^{x^2-4x+4}-e^{x^2-2x+1}\right)^2 = 0$ **3)** $e^{-x}(-3x+7) = 0$

Ici, on utilise tout ce que l'on connaît

1) $(3x-1)(e^x-1) = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$x \in S$

$\Leftrightarrow (3x-1)(e^x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (3x-1 = 0 \quad \text{ou} \quad e^x-1 = 0)$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad e^x = e^0\right)$ *pas utile sur une copie*

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = 0\right)$

$\Leftrightarrow x \in \left\{0 \; ; \frac{1}{3}\right\}$

Ainsi $\boxed{S = \left\{0 \; ; \frac{1}{3}\right\}}$

2) $\left(e^{x^2-4x+4}-e^{x^2-2x+1}\right)^2 = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$x \in S$

$\Leftrightarrow \left(e^{x^2-4x+4}-e^{x^2-2x+1}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-4x+4}-e^{x^2-2x+1} = 0$ (machin au carré égale 0 ssi machin vaut 0)

$\Leftrightarrow e^{x^2-4x+4} = e^{x^2-2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4 = x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow -2x+3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

3) $e^{-x}(-3x+7) = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$x \in S$

$\Leftrightarrow e^{-x}(-3x+7) = 0 = 0$

$\Leftrightarrow (e^{-x} = 0 \quad \text{ou} \quad -3x+7 = 0)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\qquad\qquad}_{car \exp ne\, s'annule\, pas} \quad -3x+7 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{7}{3}\right\}$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{7}{3}\right\}}$

EXERCICE N°8 Résoudre une inéquation (niveau 4) RETOUR À L'EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $2e^x - 3xe^x = 0$

2) $-xe^{-x} - x = 0$

3) $-3e^{x^2-1} + 7xe^{x^2-1} = 0$

4) $3xe^{-x} + x^2e^{-x} + 2e^{-x} = 0$

Ici, on utilise tout ce que l'on connaît

1) $2e^x - 3xe^x = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & 2e^x - 3xe^x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^x(2-3x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (e^x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-3x = 0) \\
\underbrace{\Leftrightarrow \qquad\qquad}_{car\ \exp\ ne\ s'annule\ pas}\ & \qquad\qquad 2-3x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -3x = -2 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{2}{3} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left\{\frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$

2) $-xe^{-x} - x = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & -xe^{-x} - x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -x(e^x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (-x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x + 1 = 0) \\
\Leftrightarrow\ & (-x = 0 \quad \text{ou} \quad e^x = -1) \\
\Leftrightarrow\ & (-x = 0 \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{car\ \forall x,\, e^x > 0}) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \{0\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

3) $-3e^{x^2-1} + 7xe^{x^2-1} = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & -3e^{x^2-1} + 7xe^{x^2-1} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{x^2+1}(-3+7x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (e^{x^2+1} = 0 \quad \text{ou} \quad -3+7x = 0) \\
\underbrace{\Leftrightarrow \qquad\qquad}_{car\ \exp\ ne\ s'annule\ pas}\ & \qquad\qquad -3+7x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 7x = 3 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{3}{7} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left\{\frac{3}{7}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{3}{7}\right\}}$

4) $3xe^{-x}+x^2e^{-x}+2e^{-x} = 0$

Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

$$
\begin{aligned}
& x \in S \\
\Leftrightarrow\ & 3xe^{-x}+x^2e^{-x}+2e^{-x} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{-x}(x^2+3x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (e^{-x} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+3x+2 = 0) \\
\underbrace{\Leftrightarrow \qquad\qquad}_{car\ \exp\ ne\ s'annule\ pas}\ & (x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -2) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \{-2\ ;\ -1\}
\end{aligned}
$$

-2 et -1
sont des racines
évidentes

Ainsi $\boxed{S = \{-2\ ;\ -1\}}$

Si vous trouvez que les racines ne sont pas évidentes (cela peut arriver avec le stress lors d'un devoir) alors vous utilisez le discriminant (le « Δ »).