PROBABILITÉS CONDITIONNELLES M06

EXERCICE N°1 Du concret (inversion du conditionnement)

VOIR LE CORRIGÉ

Inspiré du sesamath 1er Spé 65 p 287

Un test de dépistage d'une maladie est mis en vente. Le mode d'emploi précise que :

▫ pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2,5 % des cas ;

▫ pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,1 % des cas.

On suppose qu'une maladie touche 2 % de la population d'un pays et qu'on décide de faire passer ce test à tous les habitants.

On considère, pour un habitant donné, les événements :

M : « Cet habitant est malade. »

T : « Le test est positif. »

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Calculer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$.

3) En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif.

4) Peut-on dire que ce test est efficace ?

EXERCICE N°2 Du concret (avec une inconnue)

VOIR LE CORRIGÉ

Inspiré du sesamath 1er Spé 67 p 287

Une entreprise en ligne fait appel à deux sociétés de livraison :

95 % des clients livrés par la société A sont satisfaits de la livraison contre 80 % pour la société B.

Pour une livraison, on considère les événements :

▫ A : « Le client est livré par la société A » et

▫ S : « Le client est satisfait ».

1) Représenter la situation par un arbre dans lequel figure une inconnue.

2) Comme la société B est moins chère, l'entreprise souhaite l'utiliser le plus possible en maintenant un pourcentage de « satisfaction » d'au moins à 90 %.

Pour quelle proportion de ses livraisons doit-elle utiliser la société B ?

EXERCICE N°3 Un p'tit pont, deux p'tit ponts...♫

VOIR LE CORRIGÉ

Pour se rendre dans le centre-ville, Bruce peut prendre deux chemins :

▫ l'un passe une fois au-dessus du fleuve de sorte qu'il faut passer sur un pont P_1 dont la probabilité d'être fermé est 0,2, auquel cas, il ne peut pas se rendre au centre-ville.

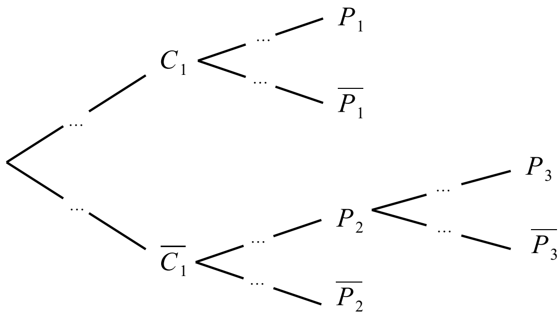
▫ l'autre passe deux fois au-dessus du fleuve de sorte qu'il faut passer sur deux ponts P_2 et P_3 dont les probabilités d'être fermés sont 0,1 (on admet que la fermeture ou non d'un pont est indépendante de l'autre et du chemin emprunté par Bruce). Si au moins l'un des deux ponts est fermé, il ne peut pas se rendre au centre-ville.

▫ Quand Bruce va au centre-ville, il passe par le premier chemin 80 % du temps (sans avoir d'information sur le fait que les ponts soient ouverts ou non).

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation. On décrira les différents événements présents par des phrases.

2) En admettant qu'on peut utiliser les règles classiques sur les arbres pondérés, déterminer la probabilité que Bruce soit bloqué par un pont.

3) Bruce est bloqué par un pont. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le premier chemin ?



PROBABILITÉS CONDITIONNELLES M06C

EXERCICE N°1 Du concret (inversion du conditionnement) *RETOUR À L'EXERCICE*

Inspiré du sesamath 1er Spé 65 p 287

Un test de dépistage d'une maladie est mis en vente. Le mode d'emploi précise que :

▫ pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2,5 % des cas ;

▫ pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,1 % des cas.

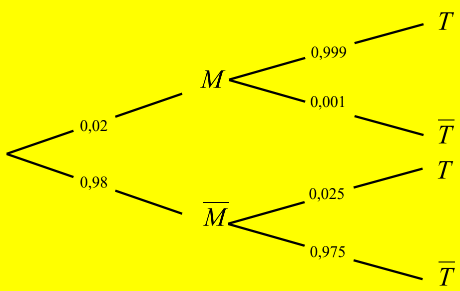
On suppose qu'une maladie touche 2 % de la population d'un pays et qu'on décide de faire passer ce test à tous les habitants.

On considère, pour un habitant donné, les événements :

M : « Cet habitant est malade. »

T : « Le test est positif. »

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.



2) Calculer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$.

▪ $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}02 \times 0{,}999 = 0{,}01998$

Ainsi $\boxed{P(M \cap T) = 0{,}01998}$

▪ D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$$

$$= 0{,}02 \times 0{,}999 + 0{,}98 \times 0{,}025$$

$$= 0{,}01998 + 0{,}0245$$

$$\boxed{P(T) = 0{,}04448}$$

3) En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif.

Il s'agit de déterminer $P_T(M)$.

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}01998}{0{,}04448} \approx 0{,}4492$$

$$\boxed{P_T(M) \approx 0{,}4492}$$

4) Peut-on dire que ce test est efficace ?

Quand le test est positif, il n'y a même pas une chance sur deux que la personne soit malade, cela ne paraît $\boxed{\text{pas très efficace}}$ ...

EXERCICE N°2 Du concret (avec une inconnue)

RETOUR À L'EXERCICE

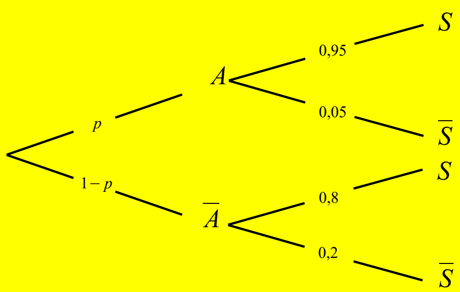
Inspiré du sesamath 1[er] Spé 67 p 287

Une entreprise en ligne fait appel à deux sociétés de livraison :
95 % des clients livrés par la société A sont satisfaits de la livraison contre 80 % pour la société B.
Pour une livraison, on considère les événements :
▫ A : « Le client est livré par la société A » et
▫ S : « Le client est satisfait ».

1) Représenter la situation par un arbre dans lequel figure une inconnue.

On fait l'arbre au brouillon, on identifie ce qui manque : $P(A)$ et on l'appelle par exemple p.

Notons p la probabilité que le client soit livré par la société A.



2) Comme la société B est moins chère, l'entreprise souhaite l'utiliser le plus possible en maintenant un pourcentage de « satisfaction » d'au moins à 90 %.
Pour quelle proportion de ses livraisons doit-elle utiliser la société B ?

Il s'agit d'obtenir $P(S) \geqslant 0{,}9$.
Or d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A)\times P_A(S) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(S) \\ &= p\times 0{,}95 + (1-p)\times 0{,}8 \\ &= 0{,}15\,p+0{,}8 \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre sur $[0\ ;\ 1]$, $0{,}15\,p+0{,}8 \geqslant 0{,}9$

$$0{,}1\,p+0{,}8 \geqslant 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}15\,p \geqslant 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad p \geqslant \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{2}{3} \ .$$

On en déduit que : $P(A) \geqslant \dfrac{2}{3}$

puis

$$P(A) \geqslant \frac{2}{3} \Leftrightarrow -P(A) \leqslant -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \underbrace{1-P(A)}_{P(B)} \leqslant 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Donc $P(B) \leqslant \dfrac{1}{3}$

Ainsi $\boxed{\text{l'entreprise doit utiliser la société } B \text{, au plus une fois sur trois}}$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES M06C

EXERCICE N°3 ***Un p'tit pont, deux p'tit ponts...♫*** RETOUR À L'EXERCICE

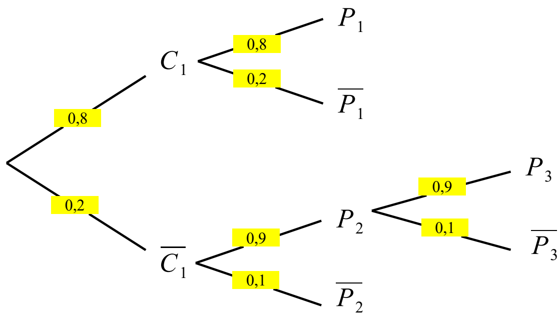
Pour se rendre dans le centre-ville, Bruce peut prendre deux chemins :

▫ l'un passe une fois au-dessus du fleuve de sorte qu'il faut passer sur un pont P_1 dont la probabilité d'être fermé est 0,2, auquel cas, il ne peut pas se rendre au centre-ville.

▫ l'autre passe deux fois au-dessus du fleuve de sorte qu'il faut passer sur deux ponts P_2 et P_3 dont les probabilités d'être fermés sont 0,1 (on admet que la fermeture ou non d'un pont est indépendante de l'autre et du chemin emprunté par Bruce). Si au moins l'un des deux ponts est fermé, il ne peut pas se rendre au centre-ville.

▫ Quand Bruce va au centre-ville, il passe par le premier chemin 80 % du temps (sans avoir d'information sur le fait que les ponts soient ouverts ou non).

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation. On décrira les différents événements présents par des phrases.



2) En admettant qu'on peut utiliser les règles classiques sur les arbres pondérés, déterminer la probabilité que Bruce soit bloqué par un pont.

Il s'agit de déterminer $P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3})$

Comme ces événements sont tous incompatibles,

$$\begin{aligned} P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3}) &= P(\overline{P_1}) + P(\overline{P_2}) + P(\overline{P_3}) \\ &= P(C_1)\times P_{C_1}(\overline{P_1}) + P(\overline{C_1})\times P_{\overline{C_1}}(P_2)\times P_{P_2}(\overline{P_3}) + P(\overline{C_1})\times P_{\overline{C_1}}(\overline{P_2}) \\ &= 0{,}8\times 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}9\times 0{,}1 + 0{,}2\times 0{,}1 \\ &= 0{,}16 + 0{,}018 + 0{,}02 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3}) = 0{,}198}$$

Ok Ok ça pique les yeux…

Voici une autre rédaction possible :

Il y a trois chemins qui réalisent l'événement « Bruce est bloqué par un pont », on additionne donc leurs probabilités respectives :

$$0{,}8\times 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}9\times 0{,}1 + 0{,}2\times 0{,}1 = 0{,}16 + 0{,}018 + 0{,}02 = \boxed{0{,}198}$$

3) Bruce est bloqué par un pont. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le premier chemin ?

Il s'agit de déterminer $P_{(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3})}(C_1)$

$$P_{(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3})}(C_1) = \frac{P(C_1 \cap (\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3}))}{P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3})} = \frac{P(C_1 \cap \overline{P_1})}{P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3})} = \frac{0{,}8\times 0{,}2}{0{,}198}$$

$$C_1 \cap (\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3}) = (C_1 \cap \overline{P_1}) \cup \underbrace{(C_1 \cap \overline{P_2})}_{\emptyset} \cup \underbrace{(C_1 \cap \overline{P_3})}_{\emptyset} = C_1 \cap \overline{P_1}$$

$$P_{(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3})}(C_1) \approx 0{,}808$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'il ait pris le premier pont vaut environ 80,8 \%}}$

Voici une autre rédaction possible :

$$\frac{0{,}8\times 0{,}2}{0{,}198} \approx 0{,}808$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'il ait pris le premier pont vaut environ 80,8 \%}}$.