LA DÉRIVATION

I Introduction (un peu longue, pas nécessaire mais pas inutile...)

On sait qualifier le comportement d'une fonction : sur un intervalle donné, elle peut être croissante, décroissante ou constante. Graphiquement, cela se traduit par « la courbe monte, descend ou stagne ». On s'aperçoit très vite que certaines courbes montent ou decendent « plus vite » que d'autres… On aimerait donc être plus précis…

On souhaite pouvoir quantifier le comportement d'une fonction, c'est à dire le caractériser par un nombre.

Pour les fonctions constantes, c'est facile, elles ne varient pas ! Donc on va décrire leur comportement par zéro.

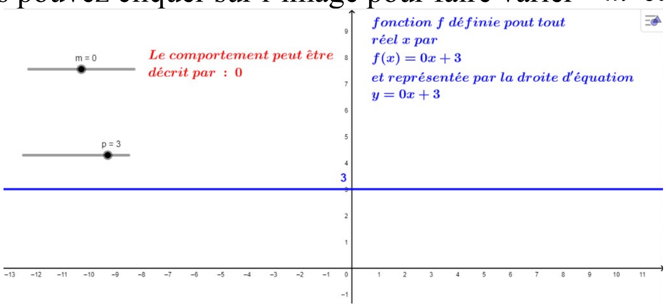
▪ Par exemple, à la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 3$ on associera zéro pour la description de ses variations. (On pourrait remplacer 3 par n'importe quel nombre, le raisonnement resterait le même…)

▪ Passons aux fonctions linéaires : Soit la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = mx$ où m est un nombre réel.

Nous savons que cette fonction est représentée par une droite d'équation réduite $y = mx$. Le comportement de la droite est donné par son coefficient directeur m . On pourra donc associer à la fonction g le nombre m pour quantifier son comportement.

▪ Les fonctions affines ne sont pas non plus difficiles à décrire puisque l'ordonnée à l'origine n'agit pas sur le comportement de la courbe mais seulement sur sa position.

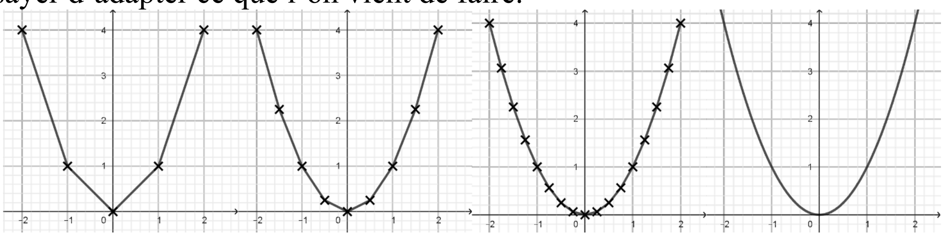
(Vous pouvez cliquer sur l'image pour faire varier m et p)



Ce qui nous a permis d'avancer jusque là, c'est que les fonctions dont nous avons parlées sont toutes représentées par des droites et qu'il est facile de quantifier le comportement d'une droite grâce à son coefficient directeur : m

Les autres fonctions ne sont pas représentées par des droites et un seul nombre ne suffira plus à décrire leur comportement.

Notre stratégie consistera alors à travailler sur de (très très) petits morceaux de la courbe qui, dans les bons cas ressembleront à des morceaux de droite, et essayer d'adapter ce que l'on vient de faire.



Au plus les morceaux sont petits au mieux on approche la courbe...

On va passer du global au local…

II Le point de vue local

II.1 Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

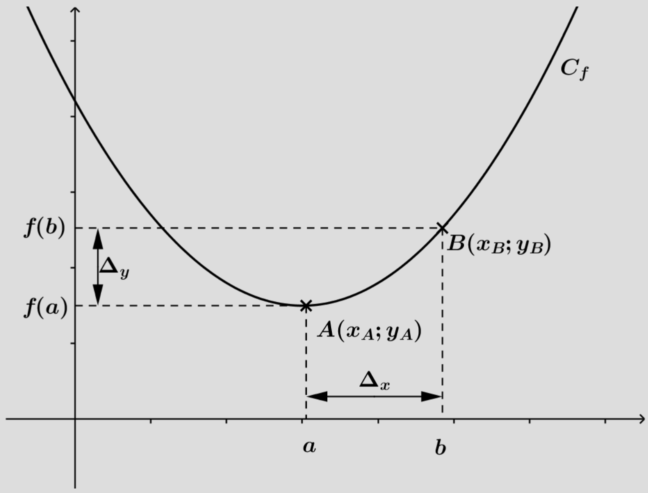
Définition n°1.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux nombres a et b appartenant à I. On appelle taux de variation entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Remarque n°1.

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

où $\Delta_y = y_B-y_A$ et $\Delta_x = x_B-x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

Remarque n°2.

Le taux de variation entre a et b est donc le coefficient directeur de la droite (AB).

Remarque n°3.

Attention, à ne pas confondre taux de variation et taux d'évolution.

Définition n°2.

La droite (AB) est une sécante à la courbe C_f passant par A.

Remarque n°4.

Sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ la courbe se comporte « un peu comme » la droite (AB) dont le comportement peut-être décrit par… le taux de variation.

Remarque n°5.

On aurait pu faire la même phrase avec B mais dans la suite on va « fixer » A et « faire varier » B.

II.2 Nombre dérivé

En observant la figure précédente, on s'aperçoit que si la courbe est « assez lisse » alors son comportement (variation) ressemble à celui de la sécante et que cette ressemblance est d'autant plus forte que les points A et B sont proches l'un de l'autre.

Définition n°3. ***(un peu hors programme...pour le moment)***

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathring{I}$

On appelle nombre dérivé de f en a et on note si cela existe :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque n°6. ***Nombre dérivé d'une fonction f en a.***

La notion de limite n'étant pas pour tout de suite, on se contentera de dire que :

$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

Exemple n°1.

Soit $f := \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \to x^2 + 5 \end{cases}$, déterminons le nombre dérivé de f en 3.

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 + 5 - (3^2 + 5)}{h} = \frac{h^2 + 6h + 9 + 5 - 9 - 5}{h} = h + 6$$

On faisant « tendre h vers 0 », on obtient 6.

Donc $f'(3) = 6$.

Remarque n°7.

Mais d'où sort ce h ?

C'est la variation absolue des abscisses : $h = \Delta_x = x_B - x_A$

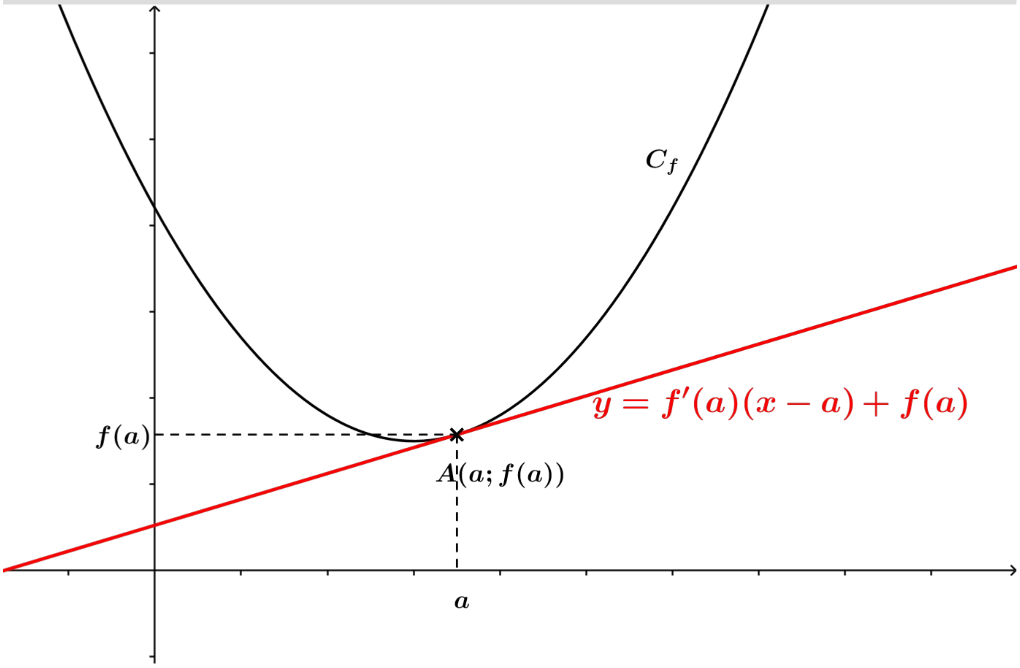
On faisant tendre h vers zéro, on rapproche le point B du point A.

III Tangente à la courbe C_f au point $(a\ ;\ f(a))$

Comme annoncé à la remarque n°5, nous allons faire « tendre B vers A » et notre sécante va devenir une tangente.
En notant $B(a+h\ ;\ f(a+h))$, on constate que le coefficient directeur de la sécante va « tendre », quand h tend vers 0 , vers $f'(a)$.

Définition n°4.

La tangente T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarque n°8.

Cette tangente possède un coefficient directeur, elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(a)$ par définition.
Comme de plus, $A(a\ ;\ f(a))$ appartient à C_f, on obtient que :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
d'où l'on déduit que :
$p=f(a)-a\times f'(a)$
Ainsi l'équation réduite de C_f peut s'écrire :
$y=f'(a)x+f(a)-a\,f'(a)$
que l'on simplifie en : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour obtenir la propriété suivante.

Propriété n°1. ***Équation de la tangente***

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle I et $a\in I$.
Si elle existe, la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Remarque n°9.

Bon, tout ça c'est bien gentil mais quelle galère ce calcul du nombre dérivé !
Ce serait bien d'avoir une sorte de formule qui nous ferait gagner du temps…
Cela tombe bien, c'est l'objet du prochain paragraphe. On revient au global.

IV Le point de vue global

IV.1 Fonction dérivée d'une fonction

Définition n°5.

$f:=\begin{cases} I\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow f(x)\end{cases}$ où $I\subset\mathbb{R}$ est un intervalle.

Si pour tout nombre réel x appartenant à l'intérieur de I , $f'(x)$ existe alors on dit que la fonction f est dérivable sur l'intérieur de I et on appelle fonction dérivée de f , la fonction notée f' définie par

$f':=\begin{cases} \mathring{I}\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow f'(x)\end{cases}$

Exemple n°2.

Reprenons la fonction de l'exemple n°1, $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow x^2+5\end{cases}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$. Considérons le quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2+5-x^2-5}{h}=2x+h$$

En faisant « tendre h vers 0 » , on obtient $2x$.

Ainsi $f'(x)=2x$.

Ceci étant valable pour tout réel x , nous venons de démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est : $f':=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow 2x\end{cases}$

IV.2 Quelques fonctions dérivées de référence

Remarque n°10. ***Fonction dérivée d'une fonction constante***

Si f est une fonction constante sur I , autrement dit pour tout $x\in I$

$f(x)=k$ avec $k\in\mathbb{R}$ alors :

$f(x+h)-f(x)=k-k=0$ pour tout h , on en déduit que $f'(x)=0$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

(On le savait depuis l'introduction...)

Remarque n°11. ***Fonction dérivée de la fonction identité***

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow x\end{cases}$ alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $h\in\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1$$

Ainsi la fonction dérivée de la fonction identité est la fonction constante égale à 1.

(On le savait aussi...)

Propriété n°2. ***Fonction dérivée de la fonction carré***

Si $f:=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow x^2\end{cases}$ alors $f':=\begin{cases} \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \\ x\rightarrow 2x\end{cases}$

preuve :

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=2x+h$$

qui « tend vers $2x$ » quand « h tend vers 0 » .

Remarque n°12.

Cela confirme qu'on ne décrit plus le comportement à l'aide d'un seul nombre (puisque « $2x$ » varie avec x …).

Résumons cela dans un tableau et ajoutons-y quelques lignes que nous démontrerons en exercice.

Propriété n°3. ***Fonctions dérivées des fonctions de références (admises ici)***

k est un nombre réel, n est un entier naturel non nul.

$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
k	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\|x\|$	$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	1 si $x\geqslant 0$ -1 si $x<0$

La dernière ligne du tableau appelle quelques précisions :

Définition n°6. ***Valeur absolue***

On appelle valeur absolue d'un nombre réel a, sa distance à zéro et on note alors $|a|$.

Exemple n°3.

$|7,1| = 7,1$ et $|-7,1| = 7,1$

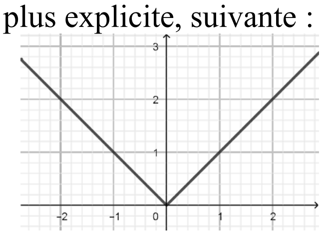
Définition n°7. ***La fonction valeur absolue***

La fonction valeur absolue est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$.

Remarque n°13.

On peut aussi la définir de la façon, plus explicite, suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Elle apparaît donc clairement affine par morceaux et on comprend mieux la dernière ligne du tableau précédent.

Propriété n°4. ***(admise ici)***

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

Remarque n°14.

On progresse mais que fait-on par exemple pour $g(x) = 4x^3-2x^2+17$?
On lit le paragraphe suivant…

IV.3 Fonctions dérivées et opérations

Voici un second tableau tout aussi important à connaître que le précédent et nous donnerons les démonstrations en exercice.

Propriété n°5. ***Fonctions dérivées et opérations (admises ici)***

On se donne u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et on note u' et v' leur fonction dérivée.
a et b sont des nombres réels

$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
$k\times u(x)$	I	$k\times u'(x)$
$u(x)+v(x)$	I	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)\times v(x)$	I	$u'(x)v(x)+u(x)'v(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\forall x\in I, u(x)\neq 0$	$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\forall x\in I, v(x)\neq 0$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)'v(x)}{(v(x))^2}$
$u(ax+b)$	$\forall x\in\mathbb{R}, ax+b\in I$	$a\times u'(ax+b)$

Remarque n°15.

Il ne nous reste plus qu'à faire le lien entre les variations d'une fonction et sa fonction dérivée.

IV.4 Variations d'une fonction et signe de la dérivée

Propriété n°6. ***(admise ici)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

▪ Si f est croissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$

▪ Si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$

▪ Si f est constante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)=0$

Propriété n°7. ***(admise ici)***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

▪ Si pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$ alors f est croissante sur I

▪ Si pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$ alors f est décroissante sur I

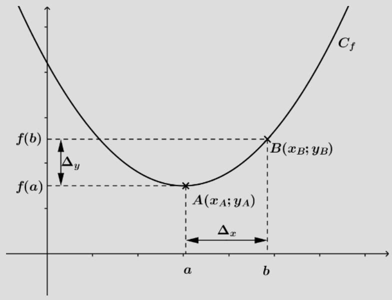
▪ Si pour tout x de I $f'(x)=0$ alors f est constante sur I

V Le résumé du cours

Taux de variation

Si on note C_f la courbe représentative de f dans un repère et qu'on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à C_f alors :

$$\textbf{taux de variation :}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$



où $\Delta_y = y_B - y_A$ et $\Delta_x = x_B - x_A$ sont les variations absolues respectivement des ordonnées et des abscisses.

Nombre dérivé

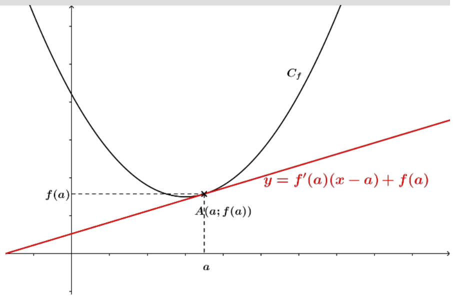
$f'(a)$ est le nombre obtenu en faisant « tendre h vers 0 » dans le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (Quand ce nombre existe…)

Tangente, coefficient directeur et nombre dérivé

La **tangente** T à C_f au point $A(a\ ;\ f(a))$ est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $\boldsymbol{f'(a)}$.

Équation de la tangente en *a*

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$



Fonction dérivée

Si f est dérivable sur I, on note f' sa fonction dérivée et pour tout x dans I $f'(x)$ vaut le nombre dérivé de la fonction f en x .

Fonctions dérivées de référence

k est un nombre réel, n est un entier naturel non nul.

$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
k	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$ $=]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ $=]0\ ;\ +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$ $=]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$	1 si $x\geqslant 0$ -1 si $x<0$

Valeur absolue

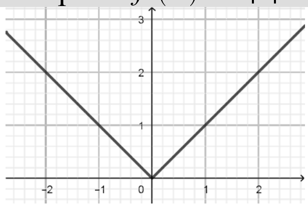
On appelle valeur absolue d'un nombre réel a, sa distance à zéro et on note alors $|a|$.

Exemple : $|7{,}1| = 7{,}1$ et $|-7{,}1| = 7{,}1$

Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ (Elle est affine par morceaux)



La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

Fonctions dérivée et opérations

On se donne u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et on note u' et v' leur fonction dérivée.
a et b sont des nombres réels

$f(x)=$	f est dérivable sur	$f'(x)=$
$k\times u(x)$	I	$k\times u'(x)$
$u(x)+v(x)$	I	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)\times v(x)$	I	$u'(x)v(x)+u(x)'v(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\forall x\in I, u(x)\neq 0$	$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\forall x\in I, v(x)\neq 0$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)'v(x)}{(v(x))^2}$
$u(ax+b)$	$\forall x\in\mathbb{R}, ax+b\in I$	$a\times u'(ax+b)$

Variations d'une fonction et signe de la dérivée

comportement implique signe

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est croissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$
- Si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$
- Si f est constante sur I alors, pour tout x de I $f'(x)=0$

Signe implique comportement

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout x de I $f'(x)\geqslant 0$ alors f est croissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x)\leqslant 0$ alors f est décroissante sur I
- Si pour tout x de I $f'(x)=0$ alors f est constante sur I