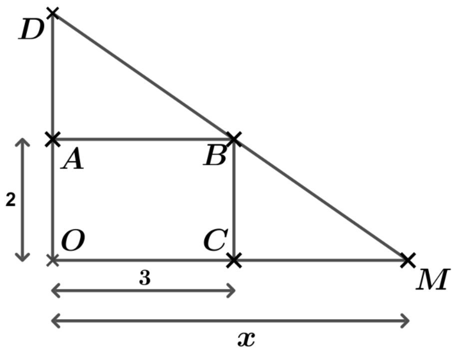
LA DÉRIVATION M07

EXERCICE N°1 *Optimisation en géométrie* VOIR LE CORRIGÉ

Extrait du Sesamath 1er spe n°83 p158

Un charpentier doit construire le toit incliné (DM) au dernier étage d'une maison, en laissant un espace rectangulaire vide $(OABC)$ qui correspondra à la surface habitable de cet étage. II observe qu'il peut faire varier l'inclinaison de ce toit tout en conservant l'espace habitable $OABC$; ainsi la hauteur OD va varier en fonction de la largeur au sol x. Afin d'optimiser l'espace de rangement BCM et l'espace « grenier » ABD, il souhaite établir la largeur x qui permettrait de minimiser la surface OMD.
Dans le schéma ci-après les longueurs sont exprimées en mètres.



1) À l'aide d'un théorème de géométrie, exprimer OD en fonction de x.
2) En déduire que l'aire du triangle OMD peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$.
3) Étudier les variations de g sur $]3\ ;\ +\infty[$ et conclure le problème.

EXERCICE N°2 *Optimisation d'un bénéfice* VOIR LE CORRIGÉ

Inspiré du Déclic 1er spe n°86 p125

Aide au calcul
$44^2-384 = 40$
$\dfrac{30^3}{3}-22\times30^2+384\times12 = 720$
$\dfrac{12^3}{3}-22\times12^2+384\times12 = 2016$

Une entreprise produit des tablettes tactiles avec un maximum de production de $30\,000$ unités par mois. Soit x le nombre de milliers de tablettes produites.
Le coût de production en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$ par : $C(x) = \dfrac{1}{3}x^3+22x^2+96x$.
Chaque tablette est vendue 480 euros et on suppose que l'entreprise écoule toute sa production mensuelle.
1) On note $R(x)$ la recette en milliers d'euros pour x milliers de tablettes vendues. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2) Montrer que le bénéfice de l'entreprise sera alors donné par $B(x) = \dfrac{1}{3}x^3-22x^2+384x$
3) Établir le tableau de variations de B sur $[0\ ;\ 30]$.
4) Donner la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et préciser la valeur de ce bénéfice.

EXERCICE N°3 *Courbes de Lorenz* VOIR LE CORRIGÉ

Extrait du Sesamath 1er spe n°99 p162

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

(1) L est définie et croissante sur $[0\ ;1]$;
(2) $L(0)=0$ et $L(1)=1$;
(3) Pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $L(x)\leqslant x$.

1) Soit la fonction f définie sur $[0\ ;1]$ par $f(x)=x^3+2x^2$.
1.a) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 1]$.
1.b) Déterminer le signe de $f(x)-x$ sur $[0\ ;\ 1]$.
1.c) La courbe C_f représentative de la fonction f est-elle une courbe de Lorenz ?
2) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $g(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{x+1}-1$. La courbe C_g représentative de la fonction g est-elle une courbe de Lorenz ? Justifier.

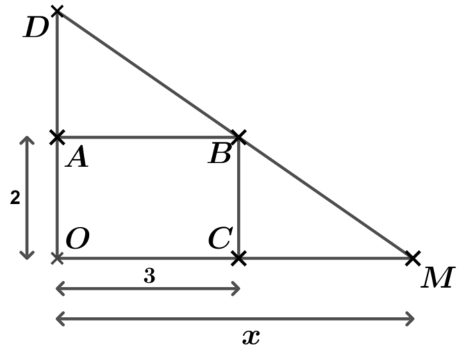
Aide au calcul
$-3+2\sqrt{3} \approx 0{,}46$

EXERCICE N°1 Optimisation en géométrie

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du Sesamath 1[er] spe n°83 p158

Un charpentier doit construire le toit incliné (DM) au dernier étage d'une maison, en laissant un espace rectangulaire vide $(OABC)$ qui correspondra à la surface habitable de cet étage. II observe qu'il peut faire varier l'inclinaison de ce toit tout en conservant l'espace habitable $OABC$; ainsi la hauteur OD va varier en fonction de la largeur au sol x. Afin d'optimiser l'espace de rangement BCM et l'espace « grenier » ABD, il souhaite établir la largeur x qui permettrait de minimiser la surface OMD.
Dans le schéma ci-après les longueurs sont exprimées en mètres.



1) À l'aide d'un théorème de géométrie, exprimer OD en fonction de x.

Pour $x > 3$

▪ On considère les triangles MBC et MOD,

▫ On sait que : M, B et D ainsi que M, C et O sont alignés dans le même ordre et que $(BC)//(OD)$ (car $OABC$ est un rectangle).

▫ On peut appliquer le théorème de Thalès :

▫ $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MC}{MO} = \dfrac{BC}{OD}$ d'où $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{2}{OD}$

On a précisé au début que $x > 3$ donc $x \neq 0$ et l'écriture est légitime.

On obtient :

$$\frac{x-3}{x} = \frac{2}{OD} \Leftrightarrow OD(x-3) = 2x \Leftrightarrow OD = \frac{2x}{x-3}$$

La dernière égalité est également légitime : $x > 3$ donc $x \neq 3$

Ainsi, pour tout $x \in]3\ ;+\infty[$,

$$\boxed{OD = \frac{2x}{x-3}}$$

2) En déduire que l'aire du triangle OMD peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]3\ ;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$.

Pour tout $x \in]3\ ;+\infty[$,

$$A_{OMD} = \frac{OM \times OD}{2} = \frac{x \times \dfrac{2x}{x-3}}{2} = \frac{\dfrac{2x^2}{x-3}}{2} = \frac{2x^2}{x-3} \times \frac{1}{2} = \frac{x^2}{x-3} = g(x) \qquad \textit{cqfd}$$

3) Étudier les variations de g sur $]3\ ;+\infty[$ et conclure le problème.

$g = \dfrac{u}{v}$ avec u et v des sommes de fonctions de références définies et dérivables sur $]3\ ;+\infty[$, de plus v ne s'annule pas sur $]3\ ;+\infty[$ donc g est bien définie et dérivable sur $]3\ ;+\infty[$ et pour tout $x \in]3\ ;+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{2x \times (x-3) - x^2 \times 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}}$$

On en déduit le tableau de signes de g' et celui de variations de g sur $x \in]3\ ;+\infty[$:

x	3		6		$+\infty$
x	||	$+$	|	$+$	
$x-6$	||	$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$	||	$+$	|	$+$	
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	12	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, il devra choisir $\boxed{\text{une longueur de } 12 \text{ m}}$.

EXERCICE N°2 *Optimisation d'un bénéfice*

RETOUR À L'EXERCICE

Inspiré du Déclic 1er spe n°86 p125

Une entreprise produit des tablettes tactiles avec un maximum de production de $30\,000$ unités par mois. Soit x le nombre de milliers de tablettes produites.
Le coût de production en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$ par : $C(x) = \frac{1}{3}x^3+22x^2+96x$.

Chaque tablette est vendue 480 euros et on suppose que l'entreprise écoule toute sa production mensuelle.

1) On note $R(x)$ la recette en milliers d'euros pour x milliers de tablettes vendues. Exprimer $R(x)$ en fonction de x .

$\boxed{R(x) = 480x}$

1 tablette se vend 480 € donc 1 milliers de tablettes se vend 480 milliers d'euros.

2) Montrer que le bénéfice de l'entreprise sera alors donné par $B(x) = \frac{1}{3}x^3-22x^2+384x$

Pour tout $x \in [0\ ;\ 30]$,

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x)-C(x) \\ &= 480x - \left(\frac{1}{3}x^3+22x^2+96x\right) \\ &= 480x - \frac{1}{3}x^3-22x^2-96x \\ &= \frac{1}{3}x^3-22x^2+384x \end{aligned}$$

cqfd

3) Établir le tableau de variations de B sur $[0\ ;\ 30]$.

▪ B est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $[0\ ;\ 30]$ donc B l'est aussi et pour tout $x \in [0\ ;\ 30]$,

$$B'(x) = \frac{1}{3}\times 3x^2 - 22\times 2x + 384\times 1$$

$$\boxed{B'(x) = x^2-44x+384}$$

Aide au calcul

$44^2-384 = 40$

$\frac{30^3}{3}-22\times 30^2+384\times 12 = 720$

$\frac{12^3}{3}-22\times 12+384\times 12 = 2016$

▪ Posons $\Delta = (-44)^2-4\times 1\times 384 = 400$,
le discriminant de ce trinôme. $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-44)-\sqrt{400}}{2\times 1} = \frac{44-20}{2} = 12$$

et

$$x_2 = \frac{-(-44)+\sqrt{400}}{2\times 1} = \frac{44+20}{2} = 32$$

▪ Ainsi , $\boxed{B'(x) = (x-12)(x-32)}$

On en déduit le tableau de signes de B' et celui de variations de B sur $[0\ ;\ 30]$.

x	0		12		30
$x-12$		$-$	0	$+$	
$x-32$		$-$	$\vert$	$-$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	2016	$\searrow$	720

Aide au calcul

$44^2-384 = 40$

$\frac{30^3}{3}-22\times 30^2+384\times 12 = 720$

$\frac{12^3}{3}-22\times 12+384\times 12 = 2016$

4) Donner la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et préciser la valeur de ce bénéfice.

D'après le tableau de variations, il faut $\boxed{\text{une production de } 12\,000 \text{ tablettes}}$ pour obtenir $\boxed{\text{un bénéfice maximal de } 2016\,000 \text{ €}}$.

EXERCICE N°3 Courbes de Lorenz

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du Sesamath 1[er] spe n°99 p162

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

(1) L est définie et croissante sur $[0\ ;1]$;
(2) $L(0)=0$ et $L(1)=1$;
(3) Pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $L(x)\leqslant x$.

1) Soit la fonction f définie sur $[0\ ;1]$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{3}$.

1.a) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 1]$.

f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $[0\ ;\ 1]$ donc f l'est aussi et pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x^2+4x}{3}}$$

ou encore

$$\boxed{f'(x) = \frac{x(3x+4)}{3}}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et celui de variations de f sur $[0\ ;\ 1]$.

x	0	1
x	+	
$3x+4$	+	
$B'(x)$	+	
$B(x)$	0 ↗	1

1.b) Déterminer le signe de $f(x)-x$ sur $[0\ ;\ 1]$.

Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$f(x)-x = \frac{x^3+2x^2}{3}-x = \frac{x^3+2x^2-3x}{3} = \frac{x}{3}(x^2+2x-3)$$

Posons $\Delta = 2^2-4\times1\times(-3) = 16$, le discriminant du trinôme. $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{-2-4}{2} = -3$$

et

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Ainsi

$$\boxed{f(x)-x = \frac{x}{3}(x-1)(x+3)}$$

On en déduit le tableau de signes suivants sur $[0\ ;\ 1]$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1
$\frac{x}{3}$	$+$
$x-1$	$-$
$x+3$	$+$
$f(x)-x$	$-$

1.c) La courbe C_f représentative de la fonction f est-elle une courbe de Lorenz ?

On a bien :

(1) : f est définie et croissante sur $[0\ ;\ 1]$ d'après 1.a)

(2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ d'après 1.a)

(3) : Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f(x)-x \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ d'après 1.b)

Donc $\boxed{C_f \text{ est bien une courbe de Lorenz}}$

2) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $g(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1$. La courbe C_g représentative de la fonction g est-elle une courbe de Lorenz ? Justifier.

▪ Commençons par vérifier le point (2) :

On a bien $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

▪ Vérifions le point (1)

Sur $[0\ ;\ 1]$, $x \mapsto x+1$ est définie et dérivable et ne s'annule pas donc $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est aussi définie et dérivable sur $[0\ ;\ 1]$.

Ainsi, g est une somme de fonctions définies et dérivables sur $[0\ ;\ 1]$, elle l'est donc aussi et pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$g'(x) = \frac{3}{2}-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}-1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\times\frac{3x^2+6x-1}{(x+1)^2}$$

Posons $\Delta = 6^2-4\times3\times(-1) = 48$,

le discriminant de ce trinôme. $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{48}}{2\times1} = \frac{-6-4\sqrt{3}}{2} = -3-2\sqrt{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-6+\sqrt{48}}{2\times1} = \frac{-6+4\sqrt{3}}{2} = -3+2\sqrt{3}$$

Aide au calcul

$-3+2\sqrt{3} \approx 0{,}46$

Ainsi ,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{3\left(x-\left(-3-2\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(-3+2\sqrt{3}\right)\right)}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{3\left(x+3+2\sqrt{3}\right)\left(x+3-2\sqrt{3}\right)}{(x+1)^2}}$$

On en déduit le tableau de signes de g' et celui de variations de g sur $[0\ ;\ 1]$.

x	0		$-3+2\sqrt{3}$		30
$x+3+2\sqrt{3}$		$+$	$\vert$	$+$	
$x+3-2\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi g n’est pas croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

Au final, $\boxed{C_g \text{ n'est pas une courbe de Lorenz}}$.