LA DÉRIVATION M05

EXERCICE N°1 Méthode : dérivée et tableau de variation

VOIR LE CORRIGÉ

Pour chaque fonction f , déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné, puis dresser le tableau de signes de f' et en déduire son tableau de variations sur I .

1) $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 2$ $\qquad I =]-4 ; 2[$

(Coup de pouce pour factoriser la dérivée : $f'(1)$, Méthode de Horner, Delta)

2) $f : x \mapsto x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$ $\qquad I =]0 ; 4[$

EXERCICE N°2 Étude de fonction

VOIR LE CORRIGÉ

Extrait du Seseamath 1spé n°37 p 154

Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; 9[\cup]9 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x+1}{x-9}$.

1) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]-\infty ; 9[\cup]9 ; +\infty[$ et déterminer sa dérivée g' .

2) Étudier le signe de g' sur $]-\infty ; 9[\cup]9 ; +\infty[$.

3) En déduire les variations de g sur $]-\infty ; 9[\cup]9 ; +\infty[$.

4) Contrôler la réponse à la question précédente en traçant la courbe de la fonction g à l'aide la calculatrice graphique.

LA DÉRIVATION M05C

EXERCICE N°1 Méthode : dérivée et tableau de variation RETOUR À L'EXERCICE

Pour chaque fonction f, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I qui est donné, puis dresser le tableau de signes de f' et en déduire son tableau de variations sur I.

1) $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 2$ $\qquad I =]-4\ ;\ 2[$

(Coup de pouce pour factoriser la dérivée : $f'(1)$, Méthode de Horner, Delta)

▪ f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$f'(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
▪ On remarque que :
$f'(1) = 1^3 + 4 \times 1^2 + 1 - 6 = 0$
Ainsi 1 est une racine évidente, ce qui nous permet d'appliquer la méthode de Horner :

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0

On en déduit que $f'(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$
▪ Posons à présent $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 1$ le discriminant du second facteur. $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2 \times 1} = -3$$

et

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2 \times 1} = -2$$

Au final $\boxed{f'(x) = (x-1)(x+2)(x+3)}$

Oui, je sais c'est long, mais vous êtes à la maison, vous avez le temps ;) Et puis ça fait une bonne révision :)

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	-4		-3		-2		1		2
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{26}{3}$	↘	$\frac{19}{4}$	↗	$\frac{16}{3}$	↘	$\frac{-71}{12}$	↗	$\frac{8}{3}$

2) $f : x \mapsto x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$ $\qquad I =]0\ ;\ 4[$

- f est bien définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}}$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		1		4
$3(x-1)$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

EXERCICE N°2 Étude de fonction

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du Sesamath 1spé n°37 p 154

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 9[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x+1}{x-9}$.

Posons $I\ =\ ]-\infty\ ;\ 9[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[$

1) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 9[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[$ et déterminer sa dérivée g' .

▪ On a :

$g\ =\ \dfrac{u}{v}$ avec u et v définies et dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I .

Donc :

g est définie et dérivable sur I et pour tout $x\ \in\ I$

$\boxed{g'(x)\ =\ \dfrac{-3}{(x-9)^2}}$

2) Étudier le signe de g' sur $]-\infty\ ;\ 9[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x\ \in\ I$,

$(x-9)^2\ >\ 0$

d'où

$\dfrac{-3}{(x-9)^2}\ <\ 0$

Ainsi ,

$\boxed{\forall x\ \in\ I\ ,\ g'(x)\ <\ 0}$

3) En déduire les variations de g sur $]-\infty\ ;\ 9[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[$.

▪ g' est strictement négative sur **l'intervalle** $]-\infty\ ;\ 9[$

donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\ ;\ 9[}$

▪ g' est strictement négative sur **l'intervalle** $]9\ ;\ +\infty[$

donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]9\ ;\ +\infty[}$

▪ Attention : le mot **intervalle** est **obligatoire**.

▪ g n'est pas décroissante sur I .

4) Contrôler la réponse à la question précédente en traçant la courbe de la fonction g à l'aide la calculatrice graphique.