# *LA DÉRIVATION M04*

## *EXERCICE N°1 Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente*

*VOIR LE CORRIGÉ*

Pour chaque fonction $f$, déterminer sa fonction dérivée $f'$ sur l'intervalle $I$ qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ au point d'abscisse $a$.

**1)** $f(x) = 2x^2+\dfrac{5}{x^2}-5$ , $I = ]0\ ;+\infty[$ , $a = 1$ .

**2)** $f(t) = -3-4t-\dfrac{2}{t^3}$ $I = ]-\infty\ ;0[$ , , $a = -2$ .

**3)** $f(x) = 6\sqrt{x}-\dfrac{3}{10x^5}$ , $I = ]0\ ;+\infty[$ , $a = 1$ .

**4)** $f(x) = \dfrac{-3x^4+x^2-1}{8x^4}$ , $I = ]-\infty\ ;0[$ , $a = -1$ .

## *EXERCICE N°2 Un peu de pratique : dérivée et nombre dérivé*

*VOIR LE CORRIGÉ*

Pour chaque fonction $f$, déterminer sa fonction dérivée $f'$ sur l'intervalle $I$ qui est donné puis calculer le nombre dérivé de $f$ en $a$.

*Aide au calcul*
$64\times 29 = 1856$

**1)** $f(x) = (x+1)\sqrt{1-2x}$ , $I = \left]-\infty\ ;\dfrac{1}{2}\right[$ , $a = 0$ .

**2)** $f(t) = (2t^2+3t)^3(5t+3)^7$ $I = \mathbb{R}$ , , $a = -1$ .

**3)** $f(t) = (3t+2)^3\sqrt{3t+2}$ , $I = \left]-\dfrac{2}{3}\ ;+\infty\right[$ , $a = 0$ .

**4)** $f(x) = \dfrac{5}{4(5x+1)^4}$ $I = \left]-\infty\ ;-\dfrac{1}{5}\right[$ , , $a = -1$ .

## *EXERCICE N°3 Tangentes passant par un point donné*

*VOIR LE CORRIGÉ*

Extrait du sesamath 1er spé 86 p 133

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2+5x-4$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit $a$ un nombre réel.

**1)** Démontrer que l'équation réduite de la tangente à $C_f$ en $a$ est $y = (2a+5)x-a^2-4$.

**2)** En déduire que $C_f$ admet deux tangentes passant par le point de coordonnées $(1\ ;-7)$ et donner l'équation de ces deux tangentes.

## *EXERCICE N°4 Déterminer une fonction*

*VOIR LE CORRIGÉ*

Extrait du Sesamath 1er spé 100 p 135

$f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

$C_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(0\ ;I\ ,J)$.
On sait que $C_f$ passe par l'origine du repère et que la droite d'équation $y = 3x-5$ est tangente à $C_f$ au point $A$ d'abscisse $-2$.

**1)** Déterminer le réel $c$.

**2)** Déterminer les coordonnées du point $A$.

**3)** En déduire les réels $a$ et $b$.

# LA DÉRIVATION M04C

**EXERCICE N°1** ***Un peu de pratique : dérivée et équation de tangente*** [RETOUR À L'EXERCICE]

Pour chaque fonction $f$ , déterminer sa fonction dérivée $f'$ sur l'intervalle $I$ qui est donné puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ au point d'abscisse $a$ .

**1)** $f(x) = 2x^2+\frac{5}{x^2}-5$ , $I = ]0\ ;+\infty[$ , $a = 1$ .

▪ $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ ,

$$f'(x) = 2\times 2x+5\times\frac{-2x}{(x^2)^2}-0 = 4x+\frac{10x}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x) = 4x-\frac{10}{x^3}}$$

▪ Une équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = 1$

d'où

$$f(1) = 2\times 1^2+\frac{5}{1^2}-5 = 2$$

et

$$f'(1) = 4\times 1-\frac{10\times 1}{1^4} = -6$$

Ainsi :

$$y = -6(x-1)+2$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = -6x+8}$$

**2)** $f(t) = -3-4t-\frac{2}{t^3}$ $I = ]-\infty\ ;0[$ , , $a = -2$ .

▪ $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $t \in I$ ,

$$f'(t) = 0-4\times 1-2\times\frac{3t^2}{(t^3)^2} = -4-\frac{6t^2}{t^6}$$

$$\boxed{f'(t) = -4-\frac{6}{t^4}}$$

▪ Une équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(t-a)+f(a)$

Ici $a = -2$

d'où

$$f(-2) = -3-4\times(-2)-\frac{2}{(-2)^3} = -3+8+\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$$

et

$$f'(-2) = -4-\frac{6}{(-2)^4} = -4-\frac{6}{16} = -4-\frac{3}{8} = -\frac{35}{8}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{35}{8}(t+2)+\frac{21}{4}$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = -\frac{35}{8}t-\frac{7}{2}}$$

**3)** $f(x) = 6\sqrt{x} - \dfrac{3}{10x^5}$ , $I = ]0\ ;\ +\infty[$ , $a = 1$ .

- $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ ,

$$f'(x) = 6\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\times\frac{-10\times5x^4}{(10x^5)^2} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3\times5\times10x^4}{10x^5\times10x^5} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3\times5}{x\times10x^5}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^6}}$$

- Une équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = 1$

d'où

$$f(1) = 6\sqrt{1} - \frac{3}{10\times1^5} = 6 - \frac{3}{10} = 5{,}7$$

et

$$f'(1) = \frac{3}{\sqrt{1}} + \frac{3}{2\times1^6} = 3 - \frac{3}{2} = 4{,}5$$

Ainsi :

$$y = 4{,}5(x-1)+5{,}7$$

qui se réduit à :

$$\boxed{y = 4{,}5x+1{,}2}$$

**4)** $f(x) = \dfrac{-3x^4+x^2-1}{8x^4}$ , $I = ]-\infty\ ;\ 0[$ , $a = -1$ .

- $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ ,

$$f'(x) = \frac{(-3\times4x^3+2x-0)\times8x^4 - 8\times4x^3(-3x^4+x^2-1)}{(8x^4)^2}$$

$$= \frac{(-12x^3+2x)\times8x^3\times x - 4\times8x^3(-3x^4+x^2-1)}{(8x^4)^2}$$

$$= \frac{8x^3[(-12x^3+2x)\times x - 4(-3x^4+x^2-1)]}{x\times8x^3\times8x^4}$$

$$= \frac{(-12x^3+2x)\times x - 4(-3x^4+x^2-1)}{8x^5}$$

$$= \frac{-12x^4+2x^2+12x^4-4x^2+4}{8x^5}$$

$$= \frac{-2x^2+4}{8x^5}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2+2}{4x^5}}$$

- Une équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici $a = -1$

d'où

$$f(-1) = \frac{-3(-1)^4+(-1)^2-1}{8(-1)^4} = \frac{-3+1-1}{8} = -\frac{3}{8}$$

et

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^2+2}{4(-1)^5} = \frac{-1+2}{4\times(-1)} = -\frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$y = -\frac{1}{4}(x+1) - \frac{3}{8}$$

qui se réduit à : $\boxed{y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{8}}$

**EXERCICE N°2 *Un peu de pratique : dérivée et nombre dérivé*** RETOUR À L'EXERCICE

Pour chaque fonction $f$ , déterminer sa fonction dérivée $f'$ sur l'intervalle $I$ qui est donné puis calculer le nombre dérivé de $f$ en $a$ .

**1)** $f(x) = (x+1)\sqrt{1-2x}$ , $I = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ , $a = 0$ .

- $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ ,

$$f'(x) = (1+0)\sqrt{1-2x} + (x+1)\times\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \sqrt{1-2x}-\frac{x+1}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-2x-(x+1)}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-2x}}}$$

- $f'(0) = \dfrac{-0}{\sqrt{1-2\times 0}} = 0$

Ainsi :

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

**2)** $f(t) = (2t^2+3t)^3(5t+3)^7$ $I = \mathbb{R}$ , , $a = -1$ .

$$f(t) = \underbrace{(2t^2+3t)^3}_{u(t)}\underbrace{(5t+3)^7}_{v(t)}$$

$$u'(t) = 3\times(2\times 2t+3\times 1)(2t^2+3t)^2 = 3(4t+3)(2t^2+3t)^2$$

$$v'(t) = 7\times(5\times 1+0)(5t+3)^6 = 35(5t+3)^6$$

- $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3(4t+3)(2t^2+3t)^2\times(5t+3)^7 + (2t^2+3t)^3\times 35(5t+3)^6 \\ &= (2t^2+3t)^2(5t+3)^6\left[3(4t+3)(5t+3) + 35(2t^2+3t)\right] \\ &= (2t^2+3t)^2(5t+3)^6\left[3(20t^2+27t+9) + 70t^2+105t\right] \\ &= (2t^2+3t)^2(5t+3)^6(60t^2+81t+27 + 70t^2+105t) \\ &= (2t^2+3t)^2(5t+3)^6(130t^2+186t+27) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = (2t^2+3t)^2(5t+3)^6(130t^2+186t+27)}$$

-

$$f'(-1) = (2(-1)^2+3(-1))^2(5(-1)+3)^6(130(-1)^2+186(-1)+27) = (-1)^2(-2)^6\times 29 = -1856$$

$$\boxed{f'(-1) = -1856}$$

Aide au calcul
$64\times 29 = 1856$

**3)** $f(t) = (3t+2)^3\sqrt{3t+2}$ , $I = \left]-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ , $a = 0$ .

- $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $t \in I$ ,

$$f'(t) = 3(3\times1+0)(3t+2)^2\times\sqrt{3t+2} + (3t+2)^3\times\frac{3\times1+0}{2\sqrt{3t+2}}$$

$$= 9(3t+2)^2\times\sqrt{3t+2} + \frac{3(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}$$

$$= \frac{9(3t+2)^2\times2(\sqrt{3t+2})^2 + 3(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}$$

$$= \frac{9(3t+2)^2\times2(3t+2) + 3(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}$$

$$= \frac{18(3t+2)^3 + 3(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}$$

$$= \frac{21(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}$$

$$\boxed{f'(t) = \frac{21(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}}$$

- $f'(0) = \frac{21(3\times0+2)^3}{2\sqrt{3\times0+2}} = \frac{21\times2^3}{2\sqrt{2}} = \frac{21\times2^2}{\sqrt{2}} = \frac{84}{\sqrt{2}} = \frac{84\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{84\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}$

$$\boxed{f'(0) = 42\sqrt{2}}$$

Pour les curieux :

$$f(t) = (3t+2)^3\sqrt{3t+2} = (3t+2)^3(3t+2)^{\frac{1}{2}} = (3t+2)^{\frac{7}{2}}$$

d'où

$$f'(t) = \frac{7}{2}\times3\times(3t+2)^{\frac{7}{2}-1} = \frac{21}{2}(3t+2)^{\frac{5}{2}} = \frac{21}{2}(3t+2)^{\frac{6}{2}}(3t+2)^{\frac{-1}{2}} = \frac{21(3t+2)^3}{2\sqrt{3t+2}}$$

**4)** $f(x) = \frac{5}{4(5x+1)^4} = \frac{5}{4}\times\frac{1}{(5x+1)^4}$ $I = \left]-\infty\,;-\frac{1}{5}\right[$ , , $a = -1$ .

- $f$ est bien définie et dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ ,

$$f'(x) = \frac{5}{4}\times\frac{4\times5(5x+1)^3}{((5x+1)^4)^2} = \frac{25(5x+1)^3}{(5x+1)^3(5x+1)(5x+1)^4} = \frac{25}{(5x+1)^5}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{25}{(5x+1)^5}}$$

- $f'(-1) = \frac{25}{(5(-1)+1)^5} = \frac{25}{(-4)^5} = \frac{25}{-4^5} = \frac{25}{-(2^2)^5} = \frac{25}{-2^{10}} = -\frac{25}{1024}$

$$\boxed{f'(-1) = -\frac{25}{1025}}$$

## *EXERCICE N°3* *Tangentes passant par un point donné*

*RETOUR À L'EXERCICE*

Extrait du sesamath 1er spé 86 p 133

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2+5x-4$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit $a$ un nombre réel.

**1)** Démontrer que l'équation réduite de la tangente à $C_f$ en $a$ est $y = (2a+5)x-a^2-4$.

La fonction $f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 2x+5}$.

Une équation de la tangente en $a$ à $C_f$ est :

$$\begin{aligned}
& y = f'(a)(x-a)+f(a) \\
\Leftrightarrow\ & y = (2a+5)(x-a)+a^2+5a-4 \\
\Leftrightarrow\ & y = (2a+5)x-a(2a+5)+a^2+5a-4 \\
\Leftrightarrow\ & y = (2a+5)x-2a^2-5a+a^2+5a-4 \\
\Leftrightarrow\ & y = (2a+5)x-a^2-4
\end{aligned}$$

*cqfd*

**2)** En déduire que $C_f$ admet deux tangentes passant par le point de coordonnées $(1\ ;\ -7)$ et donner l'équation de ces deux tangentes.

▪ Les assertions suivantes sont équivalentes :

▫ Le point de coordonnées $(1\ ;\ -7)$ appartient à la tangente en $a$.

▫ $-7 = (2a+5)\times 1-a^2-4$

▫ $a^2+4-7-(2a+5) = 0$

▫ $a^2-2a-8 = 0$

▪ Posons $\Delta = (-2)^2-4\times 1\times(-8) = 36$ le discriminant de cette dernière équation.

$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

▪ On en déduit l'existence de deux tangentes passant par le point de coordonnées $(1\ ;\ -7)$

▫ Une première en $a = x_1 = -2$

d'équation réduite :

$y = (2(-2)+5)x-(-2)^2-4$

$\boxed{y = x-8}$

▫ Une seconde en $a = x_2 = 4$

d'équation réduite :

$y = (2\times 4+5)x-4^2-4$

$\boxed{y = 13x-20}$

## EXERCICE N°4 Déterminer une fonction

RETOUR À L'EXERCICE

Extrait du Sesamath 1er spé 100 p 135

$f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

$C_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(0 ; I , J)$.
On sait que $C_f$ passe par l'origine du repère et que la droite d'équation $y = 3x-5$ est tangente à $C_f$ au point $A$ d'abscisse $-2$.

**1)** Déterminer le réel $c$.

On sait que $C_f$ passe par l'origine du repère donc $f(0) = 0$

Or : $f(0) = a\times 0^2+b\times 0+c = c$

On en déduit que $\boxed{c = 0}$

**2)** Déterminer les coordonnées du point $A$.

On sait que $A$ appartient à la droite d'équation $y = 3x-5$

ce qui équivaut à $y_A = 3\times x_A-5 = 3\times(-2)+5 = -1$

Ainsi : $\boxed{A(-2 ; -1)}$

**3)** En déduire les réels $a$ et $b$.

▪ On sait que $A \in C_f$
ce qui équivaut à $y_A = f(x_A)$
d'où $y_A = a\times(x_A)^2+b\times x_A = 4a-2b$
on encore :

$\boxed{4a-2b = -1}$

▪ De plus le coefficient directeur de la tangente en $-2$ étant le nombre dérivé de la fonction en $-2$ , on obtient :
$f'(-2) = 3$
Or $f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $f$ l'est aussi et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = 2ax+b$
On en déduit que :
$2a\times(-2)+b = 3$
ou plutôt :

$\boxed{-4a+b = 3}$

▪ Nous avons obtenu deux conditions qui doivent être vraies : $\begin{cases} 4a-2b = 1 \\ -4a+b = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4a-2b = 1 & (L_1) \\ -4a+b = 3 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b = 1 & (L_1) \\ -b = 4 & (L_2+L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2(-4) = 1 & (L_1) \\ b = -4 & (L_2+L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+8 = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{7}{4} \\ b = -4 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{a = -\dfrac{7}{4} \text{ et } b = -4}$