LA DÉRIVATION M03

Définition partielle :

cliquez-moi

Soit f et g deux fonctions.
On appelle composée de f par g et on note $f \circ g$ la fonction :
$f \circ g : x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

EXERCICE N°1 fonction affine et fonction carré VOIR LE CORRIGÉ

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5x+7 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ la fonction carré.
Pour $x \in \mathbb{R}$:

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$.
2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.
4) Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.
5) Comparer les questions 2) et 4).

EXERCICE N°2 fonction affine et fonction inverse VOIR LE CORRIGÉ

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5x+7 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ la fonction inverse.

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.
4) Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.
5) Comparer les questions 2) et 4).

EXERCICE N°3 fonction affine et fonction racine carrée VOIR LE CORRIGÉ

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5x+7 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ la fonction racine carrée.

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.
3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.
4) Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.
5) Comparer les questions 2) et 4).

EXERCICE N°4 fonction affine et fonction valeur absolue VOIR LE CORRIGÉ

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5x+7 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ la fonction valeur absolue.

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.
2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.

LA DÉRIVATION M03C

EXERCICE N°1 fonction affine et fonction carré

RETOUR À L'EXERCICE

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -5x+7\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ la fonction carré.

Pour $x \in \mathbb{R}$:

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-5x+7) \\ &= (-5x+7)^2 \\ &= 25x^2-70x+49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= -5x^2+7 \end{aligned}$$

On retient que l'ordre dans lequel on compose est important.

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

$(f\circ g)'(x) = 50x-70$

$(g\circ f)'(x) = -10x$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$f'(x) = 2x$

$g'(x) = -5$

4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.

$$\begin{aligned} g'(x)\times f'(g(x)) &= -5\times f'(g(x)) \\ &= -5\times 2(-5x+7) \\ &= 50x-70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x)\times g'(f(x)) &= 2x\times g'(f(x)) \\ &= 2x\times(-5) \\ &= -10x \end{aligned}$$

g' est la fonction constante égale à -5

5) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées :

$(f\circ g)'(x) = g'(x)\times f'(g(x))$

$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x))$

LA DÉRIVATION M03C

EXERCICE N°2 fonction affine et fonction inverse

RETOUR À L'EXERCICE

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -5x+7\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$ la fonction inverse.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(-5x+7)\\ &= \frac{1}{-5x+7}\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie et dérivable, il faut et il suffit que $-5x+7\neq 0$.

On en déduit que les domaines de définition et de dérivabilité de $f\circ g$ sont tous les deux $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{5}\right\}$.

Se lit « R privé de sept cinquièmes ».

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -5\times\frac{1}{x}+7\\ &= -\frac{5}{x}+4\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie et dérivable, il faut et il suffit que $x\neq 0$.

On en déduit que les domaines de définition et de dérivabilité de $f\circ g$ sont tous les deux $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

On notera que l'ordre dans lequel on compose a des conséquences sur le domaine de définition (c'est pour cela que la définition de départ a été qualifiée de « partielle »).

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{5}\right\}$ n'est pas un intervalle…

$$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{5}\right\} = \left]-\infty\ ;\ \frac{7}{5}\right[\ \cup\ \left]\frac{7}{5}\ ;\ +\infty\right[$$

- Pour $x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{7}{5}\right[$

$(f\circ g)(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{u(x)}$, dont la dérivée s'exprime par $\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$.

Donc :

$$(f\circ g)'(x) = \frac{-(-5)}{(-5x+7)^2} = \frac{5}{(-5x+7)^2}$$

- De la même façon, pour $x\in\left]\frac{7}{5}\ ;\ +\infty\right[$

$$(f\circ g)'(x) = \frac{5}{(-5x+7)^2}$$

$\mathbb{R}^*$ non plus...

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Donc :

- Pour $x\in\,]-\infty\ ;\ 0[$

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x) &= -5\times\frac{-1}{x^2}+0\\ &= \frac{5}{x^2}\end{aligned}$$

- De la même façon, pour $x\in\,]0\ ;\ +\infty[$

$$(g\circ f)'(x) = \frac{5}{x^2}$$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = -5$$

4) Exprimer $g'(x)\times f'(g(x))$ puis $f'(x)\times g'(f(x))$.

▪ Pour $x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{7}{5}\right[$

$$\begin{aligned} g'(x)\times f'(g(x)) &= -5\times f'(g(x)) \\ &= -5\times\frac{-1}{(g(x))^2} \\ &= -5\times\frac{-1}{(-5x+7)^2} \\ &= \frac{5}{(-5x+7)^2} \end{aligned}$$

▪ De la même façon, pour $x \in \left]\frac{7}{5}\ ;\ +\infty\right[$

$$g'(x)\times f'(g(x)) = \frac{5}{(-5x+7)^2}$$

▪ Pour $x \in]-\infty\ ;\ 0[$

$$\begin{aligned} f'(x)\times g'(f(x)) &= -\frac{1}{x^2}\times g'(f(x)) \\ &= -\frac{1}{x^2}\times(-5) \\ &= \frac{5}{x^2} \end{aligned}$$

g' est la fonction constante égale à -5

▪ De la même façon, pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$

$$f'(x)\times g'(f(x)) = \frac{5}{x^2}$$

5) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées : la ligne concernant l'inverse dans le tableau de la propriété n°5 semble être cas particulier de la composition.

LA DÉRIVATION M03C

EXERCICE N°3 *fonction affine et fonction racine carrée*

RETOUR À L'EXERCICE

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -5x+7 \end{cases}$ une fonction affine et soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ la fonction racine carrée.

1) Exprimer $f \circ g(x)$ puis $g \circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-5x+7) \\ &= \sqrt{-5x+7} \end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie il faut et il suffit que $-5x+7 \geqslant 0$.
Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $-5x+7>0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f \circ g$ est $\left[\frac{7}{5} ; +\infty\right[$,
et que son domaine de dérivabilité est : $\left]\frac{7}{5} ; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= -5 \times \sqrt{x}+7 \\ &= -5\sqrt{x}+7 \end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie, il faut et il suffit que $x \geqslant 0$,
et pour qu'elle soit dérivable, il faut et il suffit que $x>0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f \circ g$ est $[0 ; +\infty[$.
Et que le domaine de dérivabilité de $f \circ g$ est $]0 ; +\infty[$.

On notera encore l'importance de l'ordre dans lequel on compose…

2) Exprimer $(f \circ g)'(x)$ puis $(g \circ f)'(x)$.

▪ Pour $(f \circ g)'(x)$

On n'a pas de formule dans le cours, il faut donc y aller à la main…

Soit h tel que $x+h \in \left]\frac{7}{5} ; +\infty\right[$,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x+h)-(f \circ g)(x) &= \frac{\sqrt{-5(x+h)+7}-\sqrt{-5x+7}}{h} \\ &= \frac{\left(\sqrt{-5(x+h)+7}-\sqrt{-5x+7}\right)\left(\sqrt{-5(x+h)+7}+\sqrt{-5x+7}\right)}{h\left(\sqrt{-5(x+h)+7}+\sqrt{-5x+7}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{-5(x+h)+7}\right)^2-\left(\sqrt{-5x+7}\right)^2}{h\left(\sqrt{-5(x+h)+7}+\sqrt{-5x+7}\right)} \\ &= \frac{-5(x+h)+7-(-5x+7)}{h\left(\sqrt{-5(x+h)+7}+\sqrt{-5x+7}\right)} \\ &= \frac{-5h}{h\left(\sqrt{-5(x+h)+7}+\sqrt{-5x+7}\right)} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{-5(x+h)+7}+\sqrt{-5x+7}} \end{aligned}$$

Oh mais ça ressemble beaucoup à l'exercice n°1 de la fiche E02 !

Or : cette dernière expression tend vers $\frac{-5}{2\sqrt{-5x+7}}$ quand h tend vers zéro.

Pour les plus observateurs : il faudrait être sûr que $x+h$ continue d'appartenir à $\left]\frac{7}{5} ; +\infty\right[$ quand h tend vers zéro. Rassurez-vous, c'est bien le cas.

On en déduit que $(f \circ g)'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{-5x+7}}$

▪ Pour $(g \circ f)'(x)$

C'est plus facile, on a ce qu'il faut dans le cours.

$g \circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Donc :

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= -5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \\ &= -\frac{5}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

3) Exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = -5$$

4) Exprimer $g'(x) \times f'(g(x))$ puis $f'(x) \times g'(f(x))$.

$$\begin{aligned}g'(x) \times f'(g(x)) &= -5 \times f'(g(x)) \\ &= -5 \times \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \\ &= -5 \times \frac{1}{2\sqrt{-5x+7}} \\ &= \frac{-5}{2\sqrt{-5x+7}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) \times g'(f(x)) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times g'(f(x)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (-5) \\ &= -\frac{5}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

g' est la fonction constante égale à -5

5) Comparer les questions 2) et 4).

On obtient les mêmes fonctions dérivées : la dernière ligne du tableau semble simplifier beaucoup les choses !

EXERCICE N°4 fonction affine et fonction valeur absolue

RETOUR À L'EXERCICE

Soit $g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -5x+7\end{cases}$ une fonction affine et soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{cases}$ la fonction valeur absolue.

1) Exprimer $f\circ g(x)$ puis $g\circ f(x)$ et déterminer les domaines de définition et de dérivabilité.

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))\\ &= f(-5x+7)\\ &= |-5x+7| \end{aligned}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $-5x+7\neq 0$.
On en déduit que le domaine de définition de $f\circ g$ est $\mathbb{R}$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{5}\right\}$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x))\\ &= g(|x|)\\ &= -5\times|x|+7\\ &= -5|x|+7 \end{aligned}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que $x\neq 0$.
On en déduit que le domaine de définition de $g\circ f$ est $\mathbb{R}$,
et que son domaine de dérivabilité est :
$\mathbb{R}^*$.

2) Exprimer $(f\circ g)'(x)$ puis $(g\circ f)'(x)$.

▪ Pour $(f\circ g)'(x)$

On n'a pas de formule dans le cours, il faut donc y aller à la main...

$f\circ g(x) = |-5x+7| = \begin{cases}-5x+7 & \text{, si } -5x+7\geqslant 0\\ -(-5x+7) & \text{, si } -5x+7<0\end{cases}$ que l'on va « simplifier ».

$$f\circ g(x) = |-5x+7| = \begin{cases}-5x+7 & \text{, si } x\geqslant \dfrac{7}{5}\\ -(-5x+7) & \text{, si } x<\dfrac{7}{5}\end{cases}$$

On en déduit que :

$$(f\circ g)'(x) = \begin{cases}-5 & \text{, si } x>\dfrac{7}{5}\\ 5 & \text{, si } x<\dfrac{7}{5}\end{cases}$$

$f\circ g$ n'est pas dérivable en $\dfrac{7}{5}$: il faudrait que -5 égale 5…

▪ Pour $(g\circ f)'(x)$

C'est plus facile, on a ce qu'il faut dans le cours.

$g\circ f$ est une somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Donc :

$$(g\circ f)'(x) = \begin{cases}-5\times 1+0 & \text{, si } x>0\\ -5\times(-1)+0 & \text{, si } x<0\end{cases}$$

$$(g\circ f)'(x) = \begin{cases}-5 & \text{, si } x>0\\ 5 & \text{, si } x<0\end{cases}$$

$g\circ f$ n'est pas dérivable en 0 : il faudrait que -5 égale 5…