LA DÉRIVATION M02

EXERCICE N°1 Preuve pour la fonction dérivée de $x \mapsto 1/x$ VOIR LE CORRIGÉ

On veut démontrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Pour cela, nous allons démontrer que f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ puis que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. (*conseil : quand on parle de dérivation, on reste sur des intervalles*)

Partie 1

Soit $x \in]-\infty\ ;\ 0[$ et $h \in]-\infty\ ;\ 0[$ tel que $x+h \in]-\infty\ ;\ 0[$

On a $\dfrac{f(x+h)f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

1) Simplifier l'expression : $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

2) En déduire que $f'(x)$ existe et déterminer sa valeur.

Partie 2

Soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$ et $h \in]0\ ;\ +\infty[$ tel que $x+h \in]0\ ;\ +\infty[$

On a $\dfrac{f(x+h)f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

3) Simplifier l'expression : $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

4) En déduire que $f'(x)$ existe et déterminer sa valeur.

5) Conclure

EXERCICE N°2 Preuve de la troisième ligne du tableau de la propriété n°5 VOIR LE CORRIGÉ

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = u(x)+v(x)$

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

2) Transformer l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour séparer u et v .

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto u(x)+v(x)$.

EXERCICE N°3 Un peu de lecture attentive

La consigne est juste : Lisez attentivement la démonstration afin de comprendre la formule du cours.

Nous allons démontrer la formule sur la dérivée de l'inverse.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit u une fonction définie sur I et qui ne s'annule pas sur I .
Soit $x \in I$ et soit $h \in I$ tel que $x+h \in I$.

$$\frac{\left(\frac{1}{u}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{u}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{1}{u(x+h)}-\frac{1}{u(x)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{u(x)}{u(x+h)u(x)}-\frac{u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h}$$

Réduction au même dénominateur

$$= \frac{\frac{u(x)-u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{u(x)-u(x+h)}{u(x)u(x+h)}\times\frac{1}{h}$$

Diviser par un nombre revient à ...

$$\frac{a}{b}\times\frac{1}{c} = a\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c} = a\times\frac{1}{c}\times\frac{1}{b} = \frac{a}{c}\times\frac{1}{b}$$

$$= \frac{u(x)-u(x+h)}{h}\times\frac{1}{u(x)u(x+h)}$$

$$= -\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{u(x)u(x+h)}$$

Quand h tend vers zéro, $-\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $-u'(x)$

et

$\frac{1}{u(x)u(x+h)}$ tend vers $\frac{1}{u(x)\times u(x)} = \frac{1}{(u(x))^2}$

Donc $-\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{u(x)u(x+h)}$ tend vers $\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$.

Il y a une petite arnaque : pourquoi $u(x+h)$ tend vers $u(x)$?
Rassurez-vous, c'est vrai mais il faudra attendre la notion de continuité pour le comprendre.

EXERCICE N°4 *Déterminer la fonction dérivée d'une fonction*

VOIR LE CORRIGÉ

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f : x \mapsto -2x^2+3x-5$

2) $g : x \mapsto \frac{3}{4}x^4+\frac{7}{9}x^3$

3) $h : x \mapsto 7x^3-\frac{5}{8}\sqrt{x}$

4) $i : x \mapsto 4x^{-1}+5x$

LA DÉRIVATION M02C

EXERCICE N°1 _Preuve pour la fonction dérivée de_ $x \mapsto 1/x$ RETOUR À L'EXERCICE

On veut démontrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Pour cela, nous allons démontrer que f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$ puis que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. (*conseil : quand on parle de dérivation, on reste sur des intervalles*)

Partie 1

Soit $x \in]-\infty\ ;\ 0[$ et $h \in]-\infty\ ;\ 0[$ tel que $x+h \in]-\infty\ ;\ 0[$

On a $\dfrac{f(x+h) f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$

1) Simplifier l'expression : $\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$

$$\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \dfrac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{x^2+xh}}{h} = \dfrac{-h}{h(x^2+xh)} = \dfrac{-1}{x^2+xh}$$

2) En déduire que $f'(x)$ existe et déterminer sa valeur.

Quand h tend vers zéro, $\dfrac{-1}{x^2+xh}$ tend vers $-\dfrac{1}{x^2}$.

Or : $x \in]-\infty\ ;\ 0[$ (*il est donc non nul…*) .

On en déduit que $-\dfrac{1}{x^2}$ existe

Ainsi $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}}$

Partie 2

Soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$ et $h \in]0\ ;\ +\infty[$ tel que $x+h \in]0\ ;\ +\infty[$

On a $\dfrac{f(x+h) f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$

3) Simplifier l'expression : $\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$

De la même façon qu'à la question 1)

$$\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \dfrac{-1}{x^2+xh}$$

4) En déduire que $f'(x)$ existe et déterminer sa valeur.

De la même façon qu'à la question 2)

$\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}}$

5) Conclure

Nous savons à présent que pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 0[$, $f'(x)$ existe et vaut $-\dfrac{1}{x^2}$

et que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ existe et vaut $-\dfrac{1}{x^2}$.

Donc f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$,

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

EXERCICE N°2 *Preuve de la troisième ligne du tableau de la propriété n°5* RETOUR À L'EXERCICE

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. soit $x \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = u(x)+v(x)$

1) Pourquoi impose-t-on $x+h \in I$?

Si $x+h \notin I$ alors on ne peut pas calculer son image par u ou v .

2) Transformer l'expression $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour séparer u et v .

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)+v(x+h)-[u(x)+v(x)]}{h} \\
&= \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)-u(x)\ +\ v(x+h)-v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}
\end{aligned}$$

On réorganise les termes

On « sépare » les numérateurs

Réorganiser les termes est une « astuce » que vous retrouverez souvent plus tard...

3) En déduire le nombre dérivé en x de la fonction $f : x \mapsto u(x)+v(x)$.

Quand h tend vers zéro, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ et $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tendent respectivement vers $u'(x)$ et $v'(x)$.

On en déduit que $f'(x) = u'(x)+v'(x)$.

EXERCICE N°3 *Pas de correction*

EXERCICE N°4 ***Déterminer la fonction dérivée d'une fonction*** RETOUR À L'EXERCICE

Pour chaque fonction, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f : x \mapsto -2x^2+3x-5$

f est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -4x+3$

$f'(x) = -2\times 2x + 3\times 1 - 0$

2) $g : x \mapsto \frac{3}{4}x^4+\frac{7}{9}x^3$

g est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = 3x^3+\frac{7}{3}x^2$

$g'(x) = \frac{3}{4}\times 4x^3 + \frac{7}{9}\times 3x^2$

3) $h : x \mapsto 7x^3-\frac{5}{8}\sqrt{x}$

f est une somme de fonctions de référence définies sur $[0 ; +\infty[$ et dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc f est définie sur $[0 ; +\infty[$ et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et : $\forall x \in]0 ; +\infty[$,

$h'(x) = 21x^2-\frac{5}{16\sqrt{x}}$

- $h'(x) = 7\times 3x^2 - \frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\sqrt{x}$
- $x \mapsto 7x^3$ est bien sûr dérivable sur un ensemble plus grand : $\mathbb{R}$.

Mais, si elle dérivable sur $\mathbb{R}$ alors elle l'est aussi sur $]0 ; +\infty[$.

Et ce qui nous intéresse, c'est la fonction h.

4) $i : x \mapsto 4x^{-1}+5x$

On se souvient que $x^{-1} = \frac{1}{x}$ …

i est une somme de fonctions de référence définies et dérivables sur

$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$,

donc i est définie sur et dérivable sur

$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

et : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$,

$i'(x) = -\frac{4}{x}+5$

- $i'(x) = 4\times\frac{-1}{x} + 5\times 1$
- On peut faire le même genre de remarque qu'à la question 3)