# LES SUITES NUMÉRIQUES M04

## *EXERCICE N°1 Suite géométrique ou pas*

VOIR LE CORRIGÉ

**1)** Soit $t$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ t_n = 0{,}5^n$ .

**1.a)** Calculer les trois premiers termes de la suite $t$ .

**1.b)** Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite $t$ .

**1.c)** D'après la représentation graphique, la suite $t$ semble-t-elle géométrique ? Justifier.

**1.d)** Démontrer que $t$ est géométrique. Préciser sa raison

**2)** Soit $v$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ z_n = (n-3)^2$ .

**2.a)** Calculer les trois premiers termes de la suite $z$ .

**2.b)** Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite $z$ .

**2.c)** D'après la représentation graphique, la suite $z$ semble-t-elle géométrique ? Justifier.

**2.d)** Démontrer que $z$ n'est pas géométrique.

## *EXERCICE N°2 Suite géométrique et formule explicite : départ à 0*

VOIR LE CORRIGÉ

$u$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}1$ .

**1)** Pour tout entier naturel $n$ , exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ .

**2)** Calculer les termes $u_1$ , $u_2$ et $u_3$ .

**3)** Pour tout entier $n$ , exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

**4)** Donner alors les valeurs de $u_{10}$ , $u_{17}$ et $u_{23}$ arrondies à $10^{-4}$ près.

## *EXERCICE N°3 Suite arithmétique et formule explicite : départ à 3*

VOIR LE CORRIGÉ

$(u_n)_{n\geqslant 3}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_3 = 2$ et de raison $q = 0{,}2$ .

**1)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ , exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ .

**2)** Calculer les termes $u_4$ , $u_5$ et $u_6$ .

**3)** Pour tout entier $n \geqslant 3$ , exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

**4)** Donner alors la valeur de $u_{25}$ sous forme d'écriture scientifique avec une mantisse arrondie à $10^{-2}$ près .

## *EXERCICE N°4 Suite géométrique : Somme de termes*

VOIR LE CORRIGÉ

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 0{,}1\times 3^n$ .

**1)** Calculer $v_0$ , $v_1$ et $v_2$ .

**2)** Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer la raison de la suite.

**3)** Quelle est la valeur du 11e terme ?

**4)** Calculer la somme des 11 premiers termes.

## *EXERCICE N°5 Suite géométrique : L'échiquier de Sissa*

VOIR LE CORRIGÉ

*La légende se situe 3 000 ans av. J.C.*

Le Roi Belkib (Indes) s'ennuyait dans son grand palais. Il promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait un jeu qui l'aiderait à s'amuser.

Un jour, un sage, nommé Sissa lui présenta le jeu d'échecs. Le roi s'amusa tellement qu'il demanda à Sissa ce qu'il souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.

Sissa demanda au roi de déposer un grain de riz sur la première case, deux grains de riz sur la deuxième case, quatre grains de riz sur la troisième case, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grains à chaque case.

Le roi accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre...

*Par Thiago Cruz*

Calculer le nombre total de grains de blés devant être posés sur l'échiquier.

## EXERCICE N°1 Suite géométrique ou pas

RETOUR À L'EXERCICE

**1)** Soit $t$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ , $t_n = 0{,}5^n$

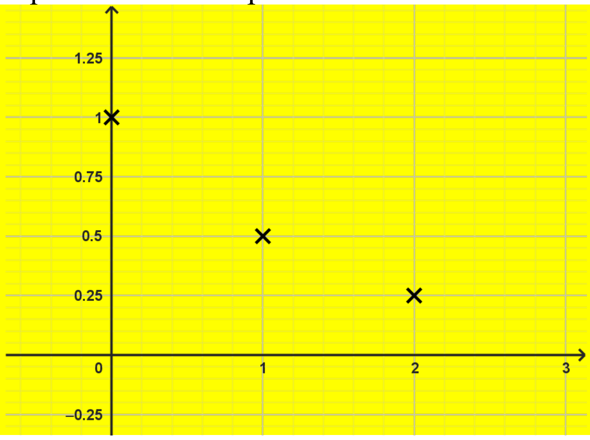
**1.a)** Calculer les trois premiers termes de la suite $t$ .

$t_0 = 3^0$ , ainsi $\boxed{t_0 = 1}$

$t_1 = 3^1$ , ainsi $\boxed{t_1 = \frac{1}{2}}$

$t_2 = 3^2$ , ainsi $\boxed{t_2 = \frac{1}{4}}$

**1.b)** Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite $t$ .




**1.c)** D'après la représentation graphique, la suite $t$ semble-t-elle géométrique ? Justifier.

Les points du nuage semblent suivre une courbe exponentielle. La suite $\boxed{t \text{ semble géométrique}}$ .

Oui, je sais, c'est très subjectif...

**1.d)** Démontrer que $t$ est géométrique. Préciser sa raison

Première rédaction possible :

On ne peut pas se contenter d'exemples…

Il est évident qu'aucun terme de la suite n'est nul.

En effet : $0{,}5^0 = 1$ et pour $n > 1$ $0{,}5^n$ est un produit de facteurs tous égaux à 0,5…

Cette remarque nous autorise à considérer les quotients qui vont suivre.

Soit $n$ un entier naturel.

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{0{,}5^{n+1}}{0{,}5^n} = 0{,}5$$

Les quotients successifs sont tous égaux à 0,5 donc la suite $\boxed{t \text{ est géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison } q = 0{,}5}$

Deuxième rédaction possible (préférez celle-ci) :

Soit $n$ un entier naturel.

$t_{n+1} = 0{,}5^{n+1} = 0{,}5 \times 0{,}5^n = 0{,}5 \times t^n$

On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = 0{,}5}$

**2)** Soit $v$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $z_n = (n-3)^2$ .

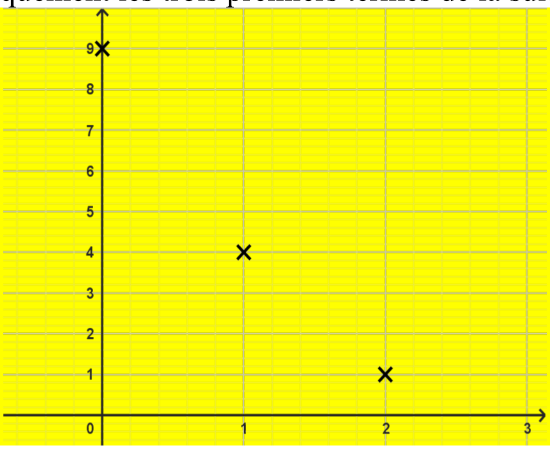
**2.a)** Calculer les trois premiers termes de la suite $z$ .

$z_0 = (0-3)^2$ , ainsi $\boxed{z_0 = 9}$

$z_1 = (1-3)^2$ , ainsi $\boxed{z_1 = 4}$

$z_2 = (2-3)^2$ , ainsi $\boxed{z_2 = 1}$

**2.b)** Représenter graphiquement les trois premiers termes de la suite $z$ .




**2.c)** D'après la représentation graphique, la suite $z$ semble-t-elle géométrique ? Justifier.

Les points du nuage semblent suivre une courbe exponentielle. La suite $\boxed{z \text{ semble géométrique}}$ .

Alors, oui je sais, c'est très subjectif….et en plus notre conjecture est fausse

On pouvait très bien prétendre que non (ce qui est vrai). Cela n'est qu'une conjecture et une conjecture à vocation à être validée ou pas (ce que l'on va faire dans la question suivante)

**2.d)** Démontrer que $z$ n'est pas géométrique.

D'une part $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et d'autre part : $\frac{z_1}{z_0} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$

Les quotients successifs ne sont pas tous égaux donc la suite $\boxed{z \text{ n'est pas géométrique}}$

Si $z$ était géométrique alors elle aurait une raison $q$ et tous les quotients successifs seraient égaux à $q$ ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

**EXERCICE N°2** ***Suite géométrique et formule explicite : départ à 0*** RETOUR À L'EXERCICE

$u$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}1$ .

**1)** Pour tout entier naturel $n$ , exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ .

Pour $n \in \mathbb{N}$ ,

$u_{n+1} = u_n \times q$ , d'où $\boxed{u_{n+1} = 1{,}1\,u_n}$

**2)** Calculer les termes $u_1$ , $u_2$ et $u_3$ .

- $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 1{,}1$ , ainsi $\boxed{u_1 = 2{,}2}$
- $u_2 = u_1 \times q = 2{,}2 \times 1{,}1$ , ainsi $\boxed{u_2 = 2{,}42}$
- $u_3 = u_2 \times q = 2{,}24 \times 1{,}1$ , ainsi $\boxed{u_3 = 2{,}662}$

**3)** Pour tout entier $n$ , exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

Pour $n \in \mathbb{N}$ ,

$u_n = u_0 \times q^n$ , d'où $\boxed{u_n = 2 \times 1{,}1^n}$

**4)** Donner alors les valeurs de $u_{10}$ , $u_{17}$ et $u_{23}$ arrondies à $10^{-4}$ près.

- $u_{10} = 2 \times 1{,}1^{10}$ , ainsi $\boxed{u_{10} \approx 5{,}1875}$
- $u_{17} = 2 \times 1{,}1^{17}$ , ainsi $\boxed{u_{17} \approx 10{,}1089}$
- $u_{23} = 2 \times 1{,}1^{23}$ , ainsi $\boxed{u_{23} \approx 17{,}9086}$

## EXERCICE N°3 Suite arithmétique et formule explicite : départ à 3

RETOUR À L'EXERCICE

$(u_n)_{n \geqslant 3}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_3 = 2$ et de raison $q = 0{,}2$ .

**1)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ , exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ .
**2)** Calculer les termes $u_4$ , $u_5$ et $u_6$ .
**3)** Pour tout entier $n \geqslant 3$ , exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .
**4)** Donner alors les valeurs de $u_{20}$ , $u_{30}$ et $u_{35}$ arrondies à $10^{-4}$ près.

**1)** Pour tout entier naturel $n \neq 0$ , exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ .

Pour , $n \geqslant 3$

$\boxed{u_{n+1} = 0{,}2\,u_n}$

On commence à 3

**2)** Calculer les termes $u_2$ , $u_3$ et $u_4$ .

- $u_4 = u_3 \times q = 2 \times 0{,}2$ , ainsi $\boxed{u_4 = 0{,}4}$
- $u_5 = u_4 \times q = 0{,}4 \times 0{,}2$ , ainsi $\boxed{u_5 = 0{,}08}$
- $u_6 = u_5 \times q = -0{,}08 \times 0{,}2$ , ainsi $\boxed{u_4 = 0{,}0016}$

**3)** Pour tout entier $n \neq 0$ , exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$u_n = u_3 \times q^{n-3}$

On commence à 3
donc on enlève 3

$\boxed{u_n = 2 \times 0{,}2^{n-3}}$

**4)** Donner alors la valeur de $u_{25}$ sous forme d'écriture scientifique avec une mantisse arrondie à $10^{-2}$ près .

Un trou de mémoire ? → voir ce cours page 2

$u_{25} = 2 \times 0{,}2^{25-3}$ , ainsi $\boxed{u_{25} \approx 8{,}39 \times 10^{-16}}$

**EXERCICE N°4** ***Suite géométrique : Somme de termes*** RETOUR À L'EXERCICE

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 0{,}1\times 3^n$ .

**1)** Calculer $v_0$ , $v_1$ et $v_2$ .

- $v_0 = 0{,}1\times 3^0$ , ainsi $\boxed{v_0 = 0{,}1}$
- $v_1 = 0{,}1\times 3^1$ , ainsi $\boxed{v_1 = 0{,}3}$
- $v_2 = 0{,}1\times 3^2$ , ainsi $\boxed{v_2 = 0{,}9}$

**2)** Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer la raison de la suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$ ,

$v_{n+1} = 0{,}1\times 3^{n+1} = 0{,}1\times 3\times 3^n = 3(0{,}1\times 3^n) = 3v_n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ , $v_{n+1} = 3v_n$

On reconnaît une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } q = 3}$ et de 1[er] terme $v_0 = 0{,}1$

**3)** Quelle est la valeur du 11[e] terme ?

On commence à zéro donc le 11[e] terme est $v_{10}$ .

$v_{10} = 0{,}1\times 3^{10}$ , ainsi $\boxed{v_{10} = 5904{,}9}$ .

**4)** Calculer la somme des 11 premiers termes.

Notons $S$ la somme demandée.

$S = \sum_{k=0}^{10} v_k = v_0\dfrac{1-q^{11}}{1-q} = 0{,}1\times\dfrac{1-3^{11}}{1-3}$ , ainsi $\boxed{S = 8857{,}3}$

**EXERCICE N°5** ***Suite géométrique : L'échiquier de Sissa*** RETOUR À L'EXERCICE

*La légende se situe 3 000 ans av. J.C.*

Le Roi Belkib (Indes) s'ennuyait dans son grand palais. Il promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait un jeu qui l'aiderait à s'amuser.
Un jour, un sage, nommé Sissa lui présenta le jeu d'échecs. Le roi s'amusa tellement qu'il demanda à Sissa ce qu'il souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.
Sissa demanda au roi de déposer un grain de riz sur la première case, deux grains de riz sur la deuxième case, quatre grains de riz sur la troisième case, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grains à chaque case.
Le roi accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre...

*Par Thiago Cruz*

Calculer le nombre total de grains de blés devant être posés sur l'échiquier.

Numérotons les cases de l'échiquier de 1 à 64.
Notons $u_n$ le nombre de grains de riz posés sur la case n° $n$ .
Il y a un grain sur la première case donc $u_1 = 1$ .
On double le nombre de grains à chaque case, donc $u$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ .
En notant $S$ la somme de tous les grains de l'échiquier, on peut écrire :

1er terme

Nombre de termes

$$S = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1$$

On utilise la remarque n°9 du cours. Son intérêt est le rang du premier terme n'a pas d'importance.

$$\boxed{S = 2^{64}-1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}$$