

CROISSANCE LINÉAIRE

I Les suites arithmétiques

Définition n°1. Suite numérique

Une **suite** numérique (ou simplement suite) est une application $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

▪ Pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est souvent noté :

u_n et on l'appelle le **terme d'indice** n de la suite.

▪ La suite est notée u , ou plus souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

▪ Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Remarque n°1.

Afin d'éviter certaines « lourdeurs », les définitions suivantes seront écrites pour le cas où u_0 est le terme initial. Nous les adapterons selon les besoins des activités.

Exemple n°1.

Notation fonctionnelle

La suite $(u(n))_{n \geq 1}$ définie par :

Pour $n \geq 1$, $u(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

$$u(1)=2, \quad u(2)=3,$$

$$u(3)=5, \quad u(4)=7,$$

$$u(5)=11 \dots$$

Notation classique

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

Pour $n \geq 1$, u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

$$u_1=2, \quad u_2=3, \quad u_3=5,$$

$$u_4=7, \quad u_5=11 \dots$$

Définition n°2. Suite arithmétique

Une **suite arithmétique** est une suite telle que :

Il existe un nombre réel r tel que :

▪ Pour tout entier naturel n , on peut écrire $u(n+1) = u(n) + r$

▪ r est appelé la **raison de la suite**.

▪ l'indice n est appelé le **rang du terme** $u(n)$

Remarque n°2.

Autrement dit : « pour obtenir le terme suivant ($u(n+1)$), il suffit d'ajouter r au terme actuel ($u(n)$).

Remarque n°3. Attention à l'écriture

En notation classique, cela donne « $u_{n+1} = u_n + r$ » qui ne veut pas dire la même chose que « $u_n + 1 = u_n + r$ ».

u_{n+1} est bien le terme suivant alors que $u_n + 1$ est le terme actuel augmenté de 1.

Il faudra donc apporter un soin particulier à l'écriture quand vous utiliserez la notation classique.

Exemple n°2.

Soit la suite arithmétique v de terme initial $v(0) = 4,5$ et de raison $r = 1,5$. Les quatre premiers de v sont :

$$v(0) = 4,5, \quad v(1) = 6, \quad v(2) = 7,5 \quad \text{et} \quad v(3) = 9.$$

Remarque n°4. Attention aux rangs

Le quatrième terme est ici $v(3)$ et pas $v(4)$

Propriété n°1. Exprimer $u(n)$ en fonction de n

Une suite $(u(n))$ est arithmétique de raison r si et seulement si :

Pour tout entier naturel n , on a $u(n) = u(0) + r \times n$

Remarque n°5.

Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1) + r \times (n-1)$

Exemple n°3.

Dans l'exemple n°2, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v(n) = 4,5 + 1,5n$.

II Et la croissance linéaire dans tout ça ?

Propriété n°2. Pour la croissance

Soit u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$:

- u est strictement croissante si et seulement si $r > 0$,
- u est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$ et
- u est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple n°4.

La suite arithmétique w de raison $r = -2$ est strictement décroissante.

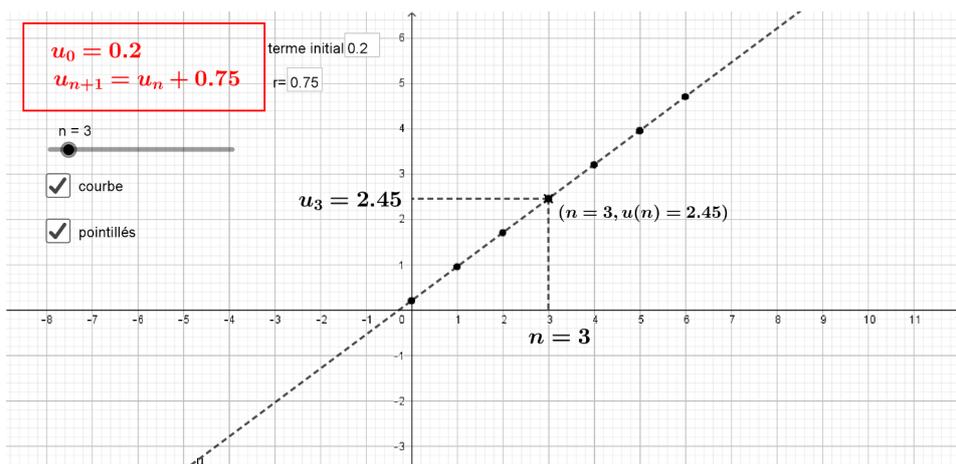
Remarque n°6.

Pour représenter la suite $(u(n))$ on utilise un nuage de points qui ont pour coordonnées $(n, u(n))$.

Propriété n°3. Pour le côté linéaire

Si u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors les points de sa représentation graphique sont alignés sur une droite de coefficient directeur r .

Exemple n°5.



Remarque n°7.

Les pointillés symbolisent la droite sur laquelle sont alignés les points du nuage mais ne font pas partie de la représentation graphique de la suite.

Méthode n°1. Trouver l'équation réduite de la droite en pointillés

▪ Si le terme initial est $u(0)$ alors $u(n) = u(0) + r \times n$ et l'équation réduite la droite est : $y = u(0) + r x$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(v(n))$ de terme initial $v(0) = 4,5$ et de raison $r = 1,5$, on a $y = 4,5 + 1,5x$

▪ Si le terme initial est $u(1)$ alors $u(n) = u(1) + (n-1) \times r$ et l'équation réduite la droite est : $y = u(1) - r + r x$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(s(n))$ de terme initial $s(1) = 6$ et de raison $r' = 1,5$, on a $y = 6 - 1,5 + 1,5x$ c'est à dire $y = 4,5 + 1,5x$.

Remarque n°8.

- Quand on étudie un phénomène discret à croissance linéaire, on utilise les suites arithmétiques.
- Quand on étudie un phénomène continu à croissance linéaire, on utilise les fonctions affines.