PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES

I Les fréquences

Définition n°1.

Soit deux variables A et B étudiées sur un même ensemble E d'individus. On peut croiser ces deux variables dans un tableau d'effectifs, à deux entrées.

$Card(A)$ est le nombre d'individus ayant le caractère A.

	B	non B	Total
A	$Card(A\cap B)$	$Card(A\cap\overline{B})$	$Card(A)$
non A	$Card(\overline{A}\cap B)$	$Card(\overline{A}\cap\overline{B})$	$Card(\overline{A})$
Total	$Card(B)$	$Card(\overline{B})$	$Card(E)$

Définition n°2.

▪ La fréquence de A dans l'ensemble E est $f(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(E)}$

▪ Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition de la variable A.

▪ Les fréquences marginales en colonne donnent la répartition de la variable B.

▪ La fréquence conditionnelle de B dans A est $f_A(B)=\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(A)}$

Exemple n°1.

Un groupe représentatif de 500 personnes se répartit suivant deux variables catégorielles:

▪ le sexe (A : féminin et non A : masculin)

▪ la Profession et Catégorie Socioprofessionnelle (PCS) réparties en 4 groupes comme ci-dessous.

	$PCS\,1$	$PCS\,2$	$PCS\,3$	$PCS\,4$	Total	Fréquences marginales
A	25	125	105	5	260	$\frac{260}{500}=0{,}52$
non A	15	90	130	5	240	$\frac{240}{500}=0{,}48$
Total	40	215	235	10	500	1
Fréquences marginales	$\frac{40}{500}=0{,}08$	$\frac{215}{500}=0{,}43$	$\frac{235}{500}=0{,}47$	$\frac{10}{500}=0{,}02$	1	

PCS1 : Agriculteurs, artisans, commerçants et chefs d'entreprise
PCS2 : Cadres, prof. intellectuelles sup., prof. Intermédiaires
PCS3 : Employés, ouvriers
PCS4 : Autres professions ou catégories

▪ Les fréquences marginales en colonnes donnent la répartition des PCS dans le groupe, indépendamment du sexe des individus. Ainsi, 47% des personnes du groupe sont employés ou ouvriers.

▪ Les fréquences marginales en lignes donnent la répartition du sexe, indépendamment de la PCS des individus. Ainsi 52% des personnes du groupe sont des femmes

▪ La fréquence conditionnelle de la PCS3 dans les personnes de sexe féminin est : $f_A(PCS\,3)=\dfrac{Card(A\cap PCS\,3)}{Card(A)}=\dfrac{105}{260}=\dfrac{21}{53}\approx 0{,}404$

• La fréquence conditionnelle des femmes dans les PCS3 du groupe est:

$$f_{PCS\,3}(A)=\frac{Card(A\cap PCS\,3)}{Card(PCS\,3)}=\frac{105}{235}=\frac{21}{47}\approx 0{,}447$$

II Les probabilités conditionnelles

II.1 Comprendre ce qu'est une probabilité conditionnelle

Définition n°3. *Événement contraire*

On note $\overline{A}$ (et on lit « A barre ») l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.

	B	$\overline{B}$
A		
$\overline{A}$		

Les cases coloriées correspondent à $\overline{A}$

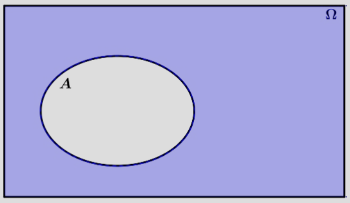


Diagramme de Venn illustrant $\overline{A}$

Définition n°4. *Intersection de deux événements*

On note $A \cap B$ (et on lit « A inter B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus à la fois dans A et B

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	
$\overline{A}$		

La case coloriée correspond à $A \cap B$

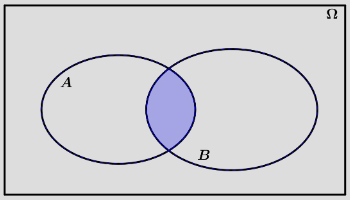


Diagramme de Venn illustrant $A \cap B$

Définition n°5. *Union de deux événements*

On note $A \cup B$ (et on lit « A union B ») l'ensemble des événements élémentaires contenus dans A ou B.

	B	$\overline{B}$
A		
$\overline{A}$		

Les cases coloriées correspondent à $A \cup B$

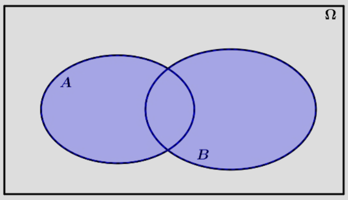


Diagramme de Venn illustrant $A \cup B$

Remarque n°1.

Attention, c'est un « ou inclusif » : l'événement peut appartenir à A, à B mais aussi à A et B en même temps

Définition n°6. *Probabilité conditionnelle*

On appelle **probabilité de B sachant A** et on note $p_A(B)$ le nombre défini par :

$$\boxed{p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}}$$

Propriété n°1.

$$\boxed{p_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

preuve :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}}{\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} \times \frac{Card(\Omega)}{Card(A)} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = p_A(B)$$

Remarque n°2. *rappel*

$Card(A)$ est le nombre d'événements élémentaires contenus dans A

Méthode n°1. ***Calculer et interpréter une probabilité conditionnelle.***

Un magasin de sport à la montagne dispose de 400 matériaux de glisse. Il propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.
Son matériel est constitué de 45 % de skis de piste, 36 % de snowboards et le reste de skis de randonnée.
Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé. Il a été constaté que la moitié des skis de piste, deux tiers des snowboards et le quart des skis de randonnée ont été abîmés pendant la journée.
Chaque paire de ski et chaque snowboard sont répertoriés sur une fiche qui précise leur suivi.

On considère les événements suivants :

- P : « La fiche est celle d'une paire de skis de piste » ;
- S : « La fiche est celle d'un snowboard » ;
- R : « La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée » ;
- A : « Le matériel a été abîmé et nécessite une réparation » .

On représente la situation sous la forme d'un tableau :

Matériel / Résultat du contrôle	P	S	R	Total
A	90	96	19	205
$\overline{A}$	90	48	57	195
Total	180	144	76	400

$$p_A(R) = \frac{Card\,(A \cap R)}{Card\,(A)} = \frac{19}{205} \approx 0{,}0927$$

Sachant que le matériau a été endommagé, il y a environ 9,27 % de chance que ce soit des skis de randonnée.

$$p_R(A) = \frac{Card\,(A \cap R)}{Card\,(R)} = \frac{19}{76} = 0{,}25$$

Il y a une chance sur quatre qu'un ski de randonné soit endommagé

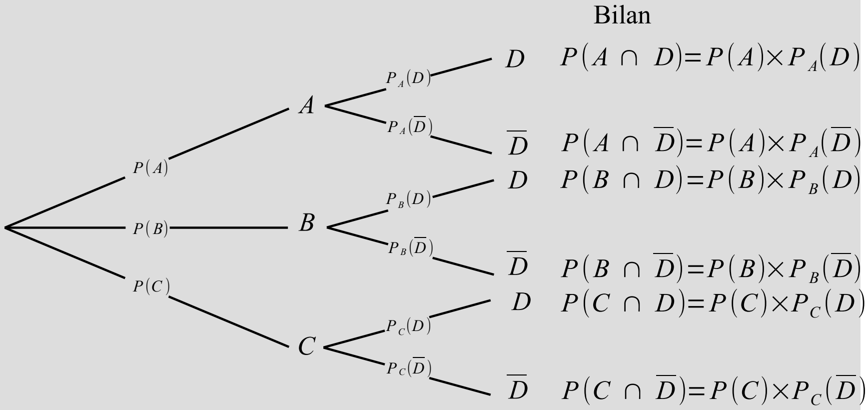
$$p_{\overline{A}}(S) = \frac{Card\,(\overline{A} \cap R)}{Card\,(\overline{A})} = \frac{48}{195} \approx 0{,}2462$$

On tire au hasard un matériau qui n'a pas été endommagé, la probabilité que ce soit un snowboard est d'environ 24,62 %.

II.2 Le lien avec les arbres de probabilités

Définition n°7. ***Arbre de probabilités***

Un arbre de probabilités est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.



Remarque n°3.

Les événements reliés à un même nœud sont incompatibles deux à deux.

Définition n°8. ***Branche***

Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène.

Exemple n°2.

Ci-dessus, sur la branche de A à D, on place $P_A(D)$, la probabilité conditionnelle de D sachant A ;

Définition n°9. ***Nœud***

Un nœud est un croisement entre plusieurs branches.

Définition n°10. ***Chemin***

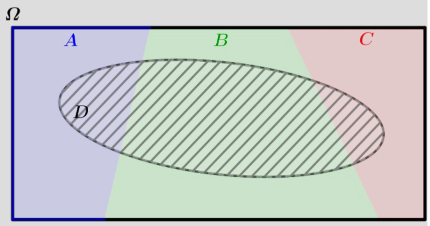
Un chemin est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.

Définition n°11. ***Événement bilan***

L'événement bilan, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

Définition n°12. ***Partition de l'univers***

Dans ce diagramme de Venn qui correspond à l'arbre de la définition n°1.
Les événements A, B et C forment une partition de l'univers Ω :
Leur réunion égale l'univers et ils sont incompatibles deux à deux (ils sont disjoints).



On en déduit la propriété suivante.

Propriété n°2.

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

Exemple n°3.

$$P(A)+P(B)+P(C)=1$$

Remarque n°4.

$D\cap A$ et $\overline{D}\cap A$ forment une partition de A et donc :

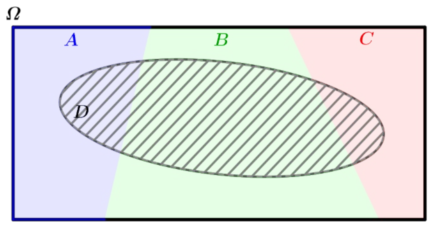
$$P_A(D)+P_A(\overline{D})=\frac{P(D\cap A)}{P(A)}+\frac{P(\overline{D}\cap A)}{P(A)}$$
$$=\frac{P(D\cap A)+P(\overline{D}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

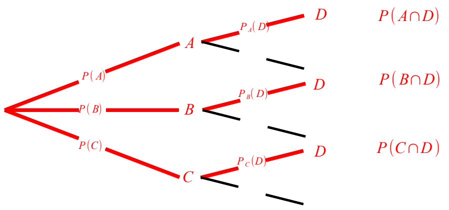
Propriété n°3. ***Formule des probabilités totales***

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement dans un arbre de probabilités.

preuve : ***(ou plutôt une explication)***

Le diagramme de Venn nous permet de comprendre que $D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)$. Comme ces événements sont incompatibles : $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$





II.3 Indépendance de deux événements

Définition n°13.

On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$

Propriété n°4. ***L'indépendance de deux événements est symétrique***

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$

preuve :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B)= P(B)\times P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Propriété n°5. ***Une autre façon de voir l'indépendance de deux événements***

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants
si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A)\times P(B)$

preuve :

Il suffit de lire la preuve de la propriété n°3...

Remarque n°5.

On a $P(A \cap B) = P_A(B)\times P(A)$ et $P_A(A)=1$
Si A et B sont disjoints alors $P_A(B)=0$

Remarque n°6. ***Attention***

Les mots « disjoint » et « indépendant » ne signifient pas du tout la même chose :
« disjoints » = « incompatibles » signifie $A \cap B = \emptyset$
(leur intersection est vide)