# LES DROITES

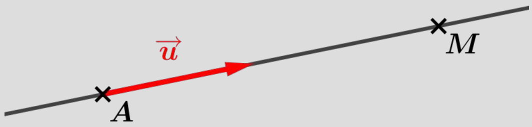
Dans tout ce chapitre, on se place dans un plan muni un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$

## I Différentes façons de décrire une droite

### I.1 Avec un point et un vecteur

***Propriété n°1.***

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $A$ un point.




L'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite.

***preuve :***

Fixons un point $N$ tel que $\overrightarrow{AN}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et considérons la droite $(AN)$ .

▪ Si un point $M$ est tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont aussi colinéaires.

On en déduit que $(AN)//(AM)$ (au sens large)

et comme $A\in(AN)$ et $A\in(AM)$ , ces droites sont confondues.

Ainsi $M\in(AN)$

▪ Si un point $M$ appartient à $(AN)$ alors $(AN)//(AM)$ (au sens large) et donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. ***cqfd***

***Remarque n°1.*** ***(sur la preuve précédente)***

▪ Le deuxième point nous dit que tous les points de la droite $(AN)$ répondent à la condition et le premier point nous dit qu'il n'y en a pas d'autre.

▪ Le point $N$ existe il suffit de prendre l'image de $A$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ .

***Définition n°1.*** ***Vecteur directeur***

$\vec{u}$ est appelé un vecteur directeur de cette droite.

***Remarque n°2.***

Pour définir une droite, il nous suffit donc d'un vecteur non nul ET d'un point.

***Remarque n°3.***

Une fois le point $A$ choisi, le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique : tout autre vecteur non nul qui lui est colinéaire engendrera la même droite.

***preuve :***

Remplacer $\vec{u}$ par l'autre vecteur en question dans la preuve de la propriété n°1...

***Propriété n°2.***

Soient $A$ et $B$ deux points et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient $d$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par $A$ ainsi que $d'$ la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par $B$ .
$d$ et $d'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

***preuve :***

Notons $N$ et $N'$ les images respectives de $A$ et $B$ par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ . On sait, grâce à la remarque n°1 et la preuve de la propriété n°1 que : $d$ et $(AN)$ sont confondues et que $d'$ et $(BN')$ le sont aussi.

$d//d' \Leftrightarrow (AN)//(BN') \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BN'}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

## *I.2 Avec une équation cartésienne*

***Propriété n°3.***

Soient $a\,,b$ et $c$ trois nombres réels tels au moins l'un des nombres $a$ et $b$ est non nul.
L'ensemble des points $M(x\;;\;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $a\,x+b\,y+c=0$ est une droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A\;;\;y_A)$ où $A$ est un point tel que $a\,x_A+b\,y_A+c=0$ .

***preuve :***

**Les préparatifs**

Soient $a\,,b$ et $c$ trois nombres réels tels au moins l'un des nombres $a$ et $b$ est non nul.
Notons $(C)$ l'ensemble des points $M(x\;;\;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ et fixons $A(x_A\;;\;y_A)$ appartenant à $(C)$ c'est à dire que : $a\,x_A+b\,y_A+c=0$ ou encore : $c=-a\,x_A-b\,y_A$
Notons $d$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passant par $A$ .

**Le plan**

▪ Nous allons montrer dans un premier temps que tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation $a\,x+b\,y+c=0$ appartiennent à une droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ . Nous aurons alors $(C)\subset d$

▪ Puis dans un second temps nous allons montrer que $d\subset(C)$ , c'est à dire que si $M(x\;;\;y)$ appartient à la droite $d$ alors ses coordonnées vérifient $a\,x+b\,y+c=0$

**La preuve**

▪ Dans ce premier temps , notre but est de démontrer que :
Si $M(x\;;\;y)\in(C)$ alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
det(\overrightarrow{AM}\;;\;\vec{u}) &= (x-x_A)\times a-(y-y_A)\times(-b)\\
&= a\,x-a\,x_A+b\,y-b\,y_A\\
&= a\,x+b\,y+\underbrace{(-a\,x_A-b\,y_A)}_{c}\\
&= ax+b\,y+c\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont bien colinéaires, ce qui signifie que $M$ appartient à la droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par $A$

▪ Dans ce second temps, notre but est de démontrer que :
Si $M(x\;;\;y)\in d$ alors $a\,x+b\,y+c=0$ où $c=-a\,x_A-b\,y_A$

$$\begin{aligned}
M(x\;;\;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}\,,\vec{u})=0\\
&\Leftrightarrow (x-x_A)\times a-(y-y_A)\times(-b)=0\\
&\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A=0\\
&\Leftrightarrow ax+by+\underbrace{(-ax_A-by_A)}_{c}\\
&\Leftrightarrow ax+by+c=0 \quad \text{, où } c=-ax_A-by_A
\end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de $M$ vérifient bien $a\,x+b\,y+c=0$

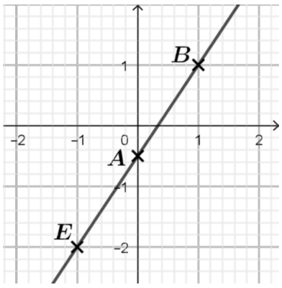
***Définition n°2.*** ***Équation cartésienne***

On dit alors que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite $d$

***Remarque n°4.***

La droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}$ passe par le point :
$A\left(\dfrac{-c}{a}\ ;\ 0\right)$ si $b=0$ , sinon par $A\left(0\ ;\ \dfrac{-c}{b}\right)$

***Exemple n°1.*** ***De l'équation cartésienne vers un vecteur directeur***




On se donne une droite $D$ d'équation cartésienne : $3x-2y-1=0$ .
On identifie : $a=3, b=-2$ et $c=-1$
On peut alors déterminer un vecteur directeur de $D$ : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
et un point appartenant à $D$ : $A\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$
Ici on a utilisé la remarque n°4, mais on peut bien sûr trouver d'autres points : le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ est aussi un point de $D$

***Exemple n°2.*** ***Du vecteur directeur vers une équation cartésienne***

On se donne une droite $D$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ passant par le point $E(-1\ ;\ -2)$ . On identifie : $a=3, b=-2$
(relire la propriété n°3 pour comprendre le « - »devant le « 2 »)
On calcule alors $c = -ax_E-by_E = -3\times(-1)-(-2)\times(-2) = -1$
On peut alors écrire une équation cartésienne de $D$ : $3x-2y-1=0$

***Remarque n°5.***

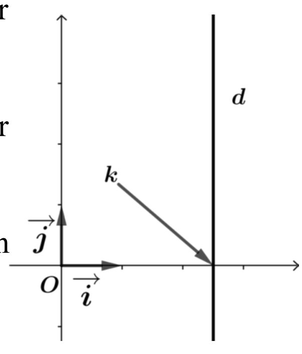
$D$ possède une infinité d'équations cartésiennes, par exemple :
$6x-4y-2=0$ , $-6x+4y+2=0$ , $30x-20y-10=0$ …

## *I.3 Avec une équation réduite*

***Propriété n°4.***

Soit $d$ une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
Une équation cartésienne de la droite $d$ peut s'écrire sous la forme $x=k$ avec $k\in\mathbb{R}$

***preuve :***




L'axe des ordonnées est une droite qui est dirigée par le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
La droite $d$ lui étant parallèle elle est aussi dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ .
Une équation cartésienne est alors $1\times x+0\times y+c=0$ que l'on note bien sûr
$x+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$
En posant $k=-c$ , on obtient bien $x=k$ .

***Remarque n°6.***

La droite étant parallèle à l'axe des ordonnées, tous ses points ont la même abscisse : $k$

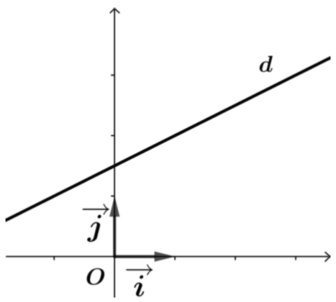
***Définition n°3.*** ***Équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.***

L'équation $\boxed{x=k}$ est appelée : **équation réduite** de $d$ .

***Propriété n°5.*** ***Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées***

Soit $d$ une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
L'**équation réduite** de $d$ peut s'écrire $\boxed{\boldsymbol{y=mx+p}}$ avec $m$ et $p$ des nombres réels.

***preuve :***




Puisque $d$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on peut trouver deux réels $a$ et $b$ avec $b\neq 0$ tels que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ dirige $d$ .

(si on avait $b=0$ alors $d$ serait parallèle à l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas le cas)

On sait alors qu'une équation cartésienne de $d$ est :
$ax+by+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$

On peut réduire cette équation en isolant $y$ :
$$y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$$

(c'est possible car $b\neq 0$ , d'où l'importance de ne pas être parallèle à l'axe des ordonnées)

Il suffit alors de poser : $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$ pour obtenir : $y=mx+p$

***Définition n°4.*** ***(petit rappel)***

$m$ est **la pente** ou le **coefficient directeur** de $d$ et
$p$ est **l'ordonnée à l'origine** de $d$

***Remarque n°7.***

Soit $f$ une fonction affine telle que $f(x)=mx+p$ alors sa représentation graphique a pour équation $y=mx+p$ et nous savons à présent que c'est bien une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. (Souvenez-vous de la propriété n°1 du cours fonctions affines et équations)

***Remarque n°8.***

Si une droite $d$ admet comme équation réduite $y=mx+p$ alors on peut écrire : $mx-y+p=0$ et en déduire qu'un vecteur directeur de $d$ est : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ .

La propriété suivante est alors évidente.

***Propriété n°6.***

Soient $d$ et $d'$ d'équations réduites respectives :
$y=mx+p$ et $y=m'x+p'$
Alors : $\boldsymbol{d\,//\,d' \Leftrightarrow m=m'}$

***Propriété n°7.***

Soit $d$ d'équation réduite $y=mx+p$
Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points appartenant à $d$ , alors :
$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

***preuve :***

On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un coefficient directeur de $d$ et on remarque aussi que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ en est un autre. Par conséquent ces vecteurs sont colinéaires et on peut écrire :

$$\begin{aligned} det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \vec{u})=0 &\Leftrightarrow (x_B-x_A)\times m-(y_B-y_A)\times 1\ =\ 0\\ &\Leftrightarrow (x_B-x_A)\times m=y_B-y_A\\ &\Leftrightarrow m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\end{aligned}$$

# *II Systèmes d'équations*

## *II.1 Système linéaire de deux équations à deux inconnues*

***Définition n°5. Qu'est-ce qu'un système ?***

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues $x$ et $y$ peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{cases}$
où $a, b, k, a', b'$ et $k'$ sont des nombres réels.

***Exemple n°3.***

$\begin{cases} -x+y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ est un système d'inconnues $x$ et $y$

***Définition n°6. Qu'est-ce qu'une solution d'un système ?***

Une solution d'un système de deux équations à deux inconnues est un couple de valeurs $(x\ ;\ y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

***Exemple n°4.***

Pour $\begin{cases} -x+y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ ,
Le couple $(-2\ ;\ 5)$ est une solution de ce système. En effet :
$-(-2)+5=7$ ET $2\times(-2)+3\times5=11$
Par contre le couple $(2\ ;\ 9)$ n'est pas une solution de ce système. En effet :
$-2+9=7$ mais $2\times2+3\times9\neq11$
Dès que l'une, au moins, des deux équations n'est pas vérifiée, le couple n'est pas solution.

***Définition n°7. Qu'est-ce-que résoudre un système ?***

Résoudre un système c'est trouver TOUTES les solutions.

## *II.2 Systèmes et droites quel rapport ?*

***Remarque n°9.***

Dans le système $\begin{cases} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{cases}$
en posant $c=-k$ et $c'=-k'$ , on peut écrire :
$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ .
On peut alors considérer que :
$ax+by+c=0$ est une équation cartésienne d'une droite $d$ et que $a'x+b'y+c'=0$ est une équation cartésienne d'une droite $d'$
Une solution du système représente alors les coordonnées d'un point commun aux deux droites et par conséquent résoudre le système revient à trouver TOUS les points commun à $d$ et $d'$ .
Il y a donc trois cas de figure possibles :

▪ Les **droites sont sécantes**, elles n'ont qu'un seul point commun et donc le système possède **une est une seule solution** : Les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ du point d'intersection des deux droites.
L'ensemble des solutions est : $\{(\boldsymbol{x_0}\ ;\ \boldsymbol{y_0})\}$

▪ Les **droites sont** (strictement) **parallèles**, elles n'ont aucun point commun et donc le système n'a **aucune solution**.
**L'ensemble des solutions est : $\boldsymbol{\emptyset}$**

▪ Les **droites sont confondues** (les deux équations définissent la même droite), il y a une **infinité de solutions** qui est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ vérifiant $ax+by+c=0$ (ou $a'x+b'y+c'=0$ puisque c'est pareil…)
L'ensemble des solutions est : $\{(\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{y})\ |\ \boldsymbol{a\,x+b\,x+c=0}\}$

## *II.3 Comment résoudre un système ?*

***Méthode n°1. La méthode par substitution***

Résoudre le système : $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans l'une des équations

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2(8+2x)=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On substitue à $y$ sa valeur en fonction de $x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+16=-5 \\ y=8+2x \end{cases}$ On simplifie

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-21}{7} \\ y=8+2x \end{cases}$ On résout l'équation d'inconnue $x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=8+2\times(-3) \end{cases}$ On remplace $x$ par sa valeur dans l'autre équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ On détermine $y$

L'ensemble des solutions de ce système est donc : $\{(\mathbf{-3}\ ;\ \mathbf{2})\}$

***Méthode n°2. La méthode par combinaison***

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+3y=1 & (L_1) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=2 & (2L_1) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-11 & (2L_1+L_2) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & (2L_1+L_2) \\ -4x+5y=-13 & (L_2) \end{cases}$

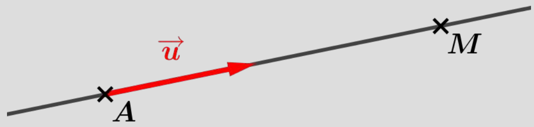
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ -4x+5\times(-1)=-13 \end{cases}$ On remplace $y$ par sa valeur

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ On résout l'équation restante

L'ensemble des solutions de ce système est donc : $\{(\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{2})\}$

## *III Le résumé du cours*

On peut définir une droite à l'aide d'**un vecteur directeur** et d'un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ .




$M(x\ ;\ y)$ est sur la droite $\Leftrightarrow$ $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $det(\vec{AM}\ ;\ \vec{u})=0$

**équation cartésienne**

On peut définir une droite à l'aide d'une **équation cartésienne** : $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

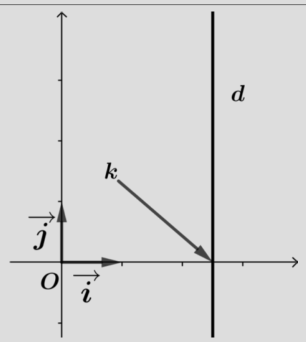
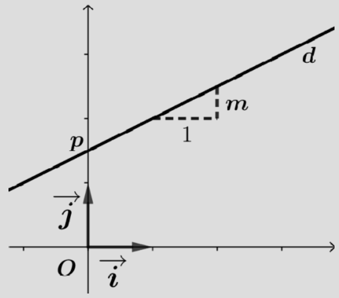
Un **vecteur directeur** est alors $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}}$ et la droite passe par le point :

$A\left(\frac{-c}{a}\ ;\ 0\right)$ si $b=0$ , sinon par $A\left(0\ ;\ \frac{-c}{b}\right)$

Chaque droite possède une infinité d'équations cartésiennes (il suffit de multiplier $a,b$ et $c$ par un même nombre non nul)

**équation réduite**

On peut réduire une équation cartésienne afin d'obtenir une **équation réduite**.

| | |
|---|---|
| Si la droite est **PARALLÈLE** à l'**axe des ordonnées** alors son équation réduite est de la forme :<br>$\boldsymbol{x=k}$ | Si la droite est **NON PARALLÈLE** à l'**axe des ordonnées** alors son équation réduite est de la forme :<br>$\boldsymbol{y=mx+p}$<br>$m$ est la pente ou le coefficient directeur<br>$p$ est l'ordonnée à l'origine |
| Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ ( $\vec{u}=\vec{j}$ ) | Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ |
|   |   Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ appartiennent à $d$ alors :<br>$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ |

**Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues**

Chercher les points communs à deux droites revient à résoudre un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** : $\begin{cases}\boldsymbol{ax+by=k} & \text{une équation cartésienne de } d\\ \boldsymbol{a'x+b'y=k'} & \text{une équation cartésienne de } d'\end{cases}$

▪ Si les droites sont sécantes l'ensemble des solutions est $\{(\boldsymbol{x_0\ ;\ y_0})\}$ où $(x_0\ ;\ y_0)$ représente les coordonnées du point d'intersection de $d$ et $d'$ (il y a donc une solution unique)

▪ Si les droites sont confondues, l'ensemble des solutions est $\{(\boldsymbol{x\ ;\ y})\ |\ \boldsymbol{ax+bx=k}\}$ (il y a donc une infinité de solutions).

▪ Si les droites sont parallèles, l'ensemble des solutions est vide . (il n'y a aucune solution)

Il faut savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues, pour cela il faut être capable de reproduire les deux méthodes de la page 6.