LA FONCTION INVERSE

I Définition et étude de la fonction inverse

Définition n°1.

La fonction inverse est la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Rappel : $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Propriété n°1.

La fonction inverse est impaire

preuve :

Notons g la fonction inverse.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ (car $D_g = \mathbb{R}^*$)

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

Ainsi g est impaire.

Propriété n°2. ***Variations de la fonction inverse***

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

preuve :

▪ Démontrons la stricte décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$
Soit $a \in]-\infty\ ;\ 0[$ et $b \in]-\infty\ ;\ 0[$ tels que $a < b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

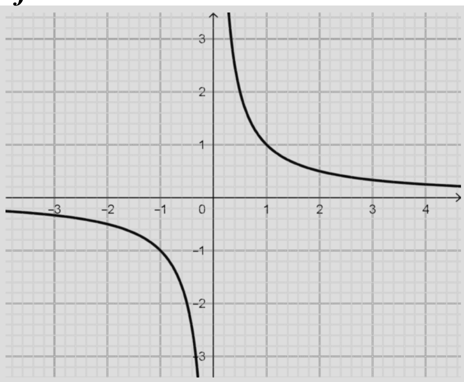
Or : $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$
Et comme a et b sont de même signe $ab > 0$
D'après la règle des signes : $\dfrac{b-a}{ab} > 0$
Nous venons de montrer que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, ce qui prouve la stricte décroissance sur $]-\infty\ ;\ 0[$
▪ La stricte décroissance sur $]0\ ;\ +\infty[$ se démontre de la même façon et est laissée à titre d'exercice.

Remarque n°1.

Attention, la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Propriété n°3. ***La représentation graphique de la fonction inverse***

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘



La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole**.

LA FONCTION INVERSE E01

EXERCICE N°1

En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

1) $x \in [5 \; ; \; 20]$ **2)** $x \in [1000 \; ; \; 2000]$ **3)** $x \in [-4 \; ; \; -1]$

4) $x \in [-5000 \; ; \; -3000]$ **5)** $x \in [10^6 \; ; \; 10^{15}]$ **6)** $x \in \left[-\frac{3}{5} \; ; \; -\frac{1}{2}\right]$

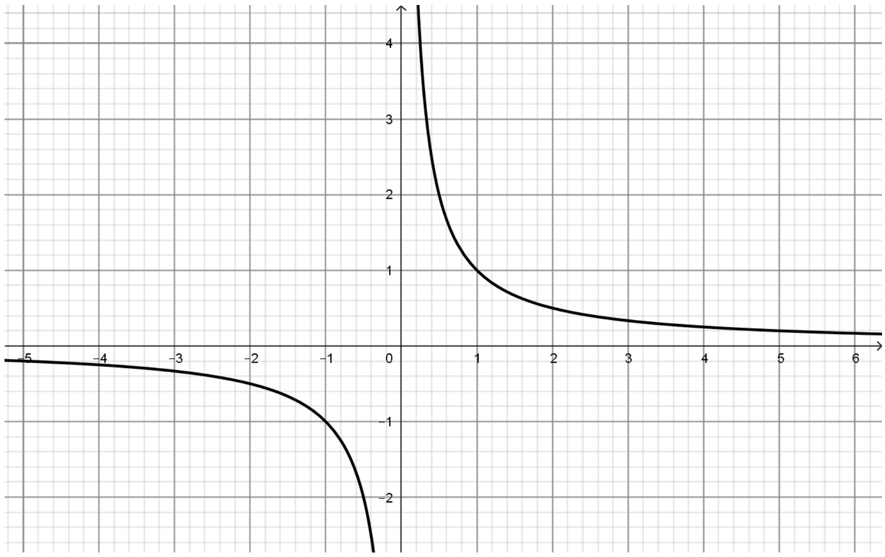
EXERCICE N°2

Soit x un nombre réel tel que $\frac{1}{10} < x < 1$

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1) $\frac{1}{x} > 10$ **2)** $1 < \frac{1}{x} \leqslant 10$ **3)** $0 < \frac{1}{x} < 100$

EXERCICE N°3



Résoudre graphiquement :

1) $\frac{1}{x} \leqslant 4$

2) $\frac{1}{x} \geqslant 2$

3) $\frac{1}{x} < -2$

4) $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$

EXERCICE N°4

Résoudre les équations suivantes pour tout réel x non nul.

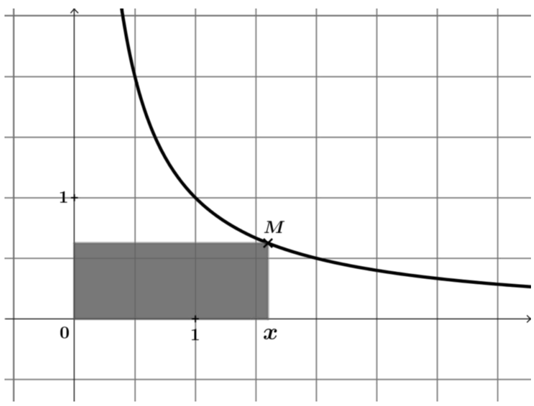
1) $\frac{-3}{x} = 0$ **2)** $\frac{4}{x} = \frac{3}{x} + 2$ **3)** $-\frac{5}{x} + 2 = \frac{3}{x} - 1$ **4)** $\frac{4}{x} + \frac{1}{2} = 0$

EXERCICE N°5

Résoudre les inéquations suivantes pour tout nombre réel x non nuls.

1) $\frac{2}{x} \leqslant 3$ **2)** $-\frac{3}{x} > 6$ **3)** $-\frac{1}{x} + 3 \geqslant 0$ **4)** $\frac{3}{x} + 1 \leqslant \frac{4}{x}$

EXERCICE N°6



On considère un point variable M sur la branche de l'hyperbole représentant la fonction inverse définie par :

$f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0 \; ; \; +\infty[$

Comment l'aire du rectangle grisé évolue-t-elle lorsque M se déplace sur la branche de l'hyperbole ?

II Equations et inéquations quotients

Exemple n°1.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{(4x-7)(5-2x)}{3x+2} \leqslant 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les « + » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$5-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{(4x-7)(5-2x)}{3x+2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

On signale les valeurs interdites

En notant S l'ensemble des solutions :

$$S = \left]-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°2.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs au numérateur ou au dénominateur.

LA FONCTION INVERSE

III Complément de cours

Définition n°2. ***Fonctions homographiques***

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $ad - bc \neq 0$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est appelée fonction homographique.

Remarque n°3.

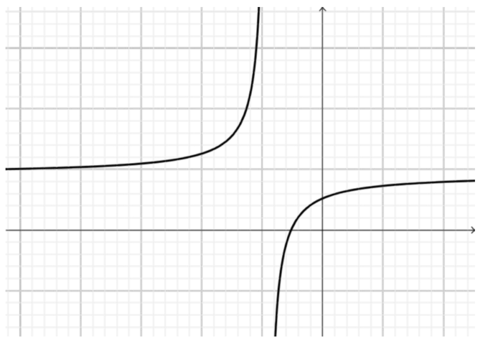
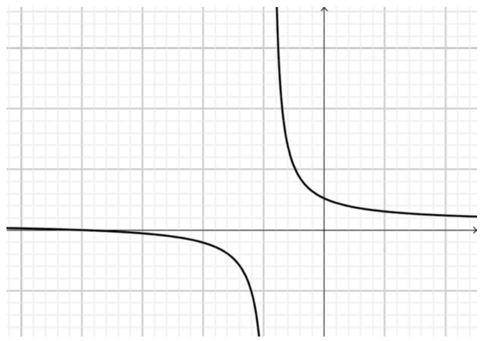
Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-d}{c}\right\} = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[\cup \left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

Propriété n°4. ***(admise)***

Quand $c \neq 0$:

▪ Si $ad - bc > 0$ alors la fonction est strictement croissante sur :
$\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

▪ Si $ad - bc < 0$ alors la fonction est strictement décroissante sur :
$\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

$ad - bc > 0$ avec $c \neq 0$	$ad - bc < 0$ avec $c \neq 0$
	
$ad - bc > 0$ avec $c = 0$	$ad - bc < 0$ avec $c = 0$