LA FONCTION INVERSE

I Définition et étude de la fonction inverse

Définition n°1.

La fonction inverse est la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Rappel : $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Propriété n°1.

La fonction inverse est impaire

preuve :

Notons g la fonction inverse.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ (car $D_g = \mathbb{R}^*$)

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

Ainsi g est impaire.

Propriété n°2. ***Variations de la fonction inverse***

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

preuve :

▪ Démontrons la stricte décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$
Soit $a \in]-\infty\ ;\ 0[$ et $b \in]-\infty\ ;\ 0[$ tels que $a < b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

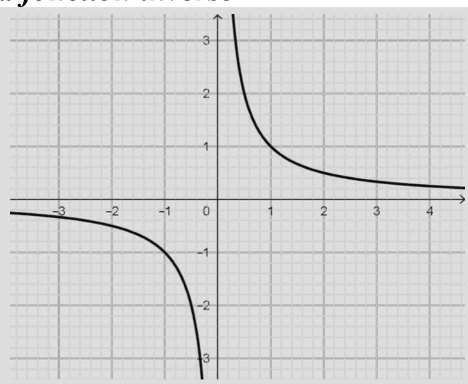
Or : $a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow b-a > 0$
Et comme a et b sont de même signe $ab > 0$
D'après la règle des signes : $\dfrac{b-a}{ab} > 0$
Nous venons de montrer que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, ce qui prouve la stricte décroissance sur $]-\infty\ ;\ 0[$
▪ La stricte décroissance sur $]0\ ;\ +\infty[$ se démontre de la même façon et est laissée à titre d'exercice.

Remarque n°1.

Attention, la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Propriété n°3. ***La représentation graphique de la fonction inverse***

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘



La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole**.

II Equations et inéquations quotients

Exemple n°1.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{(4x-7)(5-2x)}{3x+2} \leqslant 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les « + » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$5-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{(4x-7)(5-2x)}{3x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On signale les valeurs interdites

En notant S l'ensemble des solutions :

$$S = \left]-\frac{2}{3} \,;\, \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} \,;\, +\infty\right[$$

Remarque n°2.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs au numérateur ou au dénominateur.

III Complément de cours

Définition n°2. Fonctions homographiques

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $ad-bc\neq 0$.
La fonction $x\mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est appelée fonction homographique.

Remarque n°3.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}=\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[\cup\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

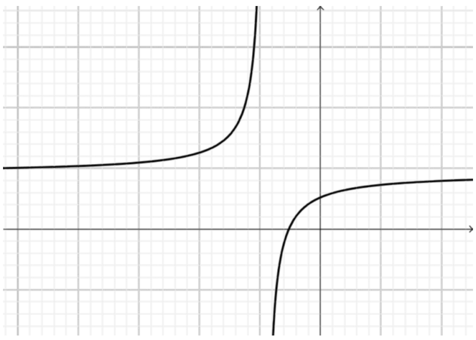
Propriété n°4. (admise)

Quand $c\neq 0$:

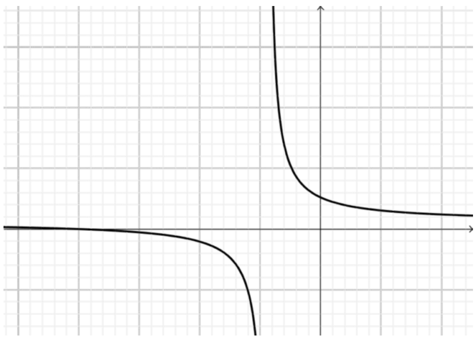
▪ Si $ad-bc > 0$ alors la fonction est strictement croissante sur :
$\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

▪ Si $ad-bc < 0$ alors la fonction est strictement décroissante sur :
$\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-d}{c}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-d}{c}\ ;\ +\infty\right[$

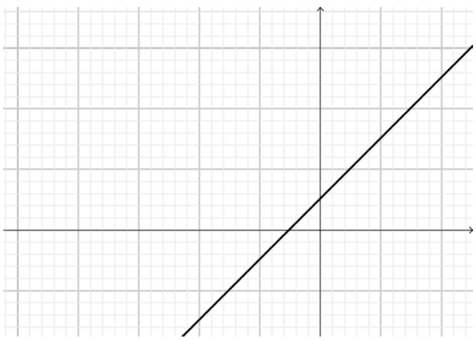
$ad-bc > 0$ avec $c\neq 0$



$ad-bc < 0$ avec $c\neq 0$



$ad-bc > 0$ avec $c=0$



$ad-bc < 0$ avec $c=0$