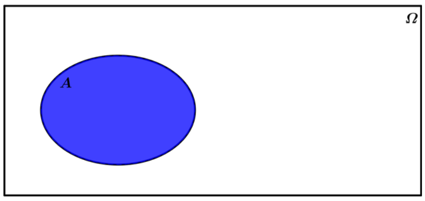
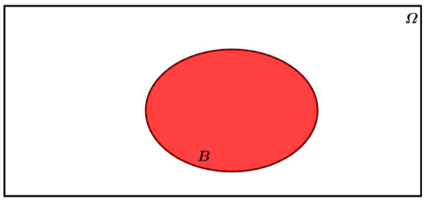
PROBABILITÉS

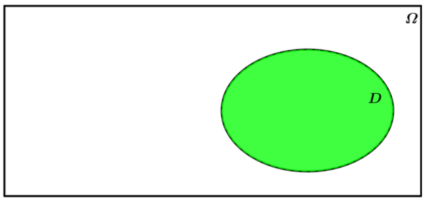
I Un peu de vocabulaire ensembliste

On se donne un ensemble que l'on décide d'appeler Ω ainsi que trois sous-ensembles de Ω que l'on décide d'appeler A, B et D. On représente cela sous la forme d'un diagramme de Venn.

Voici trois diagrammes de Venn, représentant chacun un seul des trois sous-ensembles



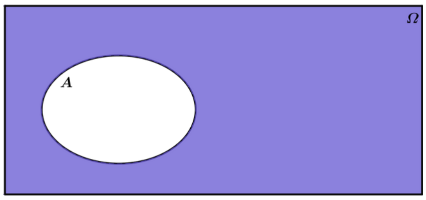




On peut représenter aussi :

Le contraire de A

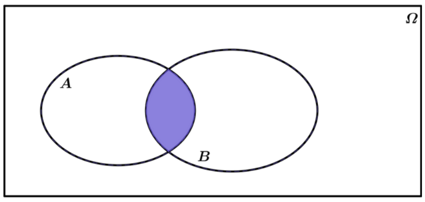
que l'on note $\overline{A}$
et que l'on lit : « A barre »



Ce sont tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.
On note aussi, parfois, $\Omega \setminus A$ qui se lit « Oméga privé de A »

L'intersection de A et B

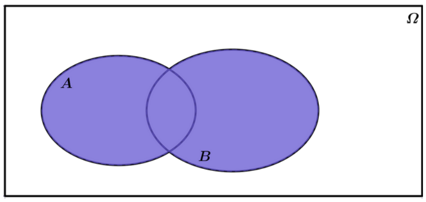
que l'on note $A \cap B$
et que l'on lit : « A inter B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **ET** B

L'union de A et B

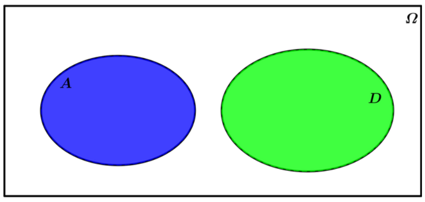
que l'on note $A \cup B$
et que l'on lit : « A union B »



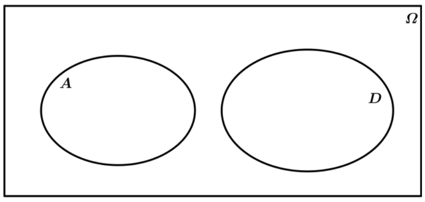
Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **OU** B
Attention, c'est un « ou » inclusif, vous verrez parfois écrit « et/ou » à la place de « ou ».

Il se peut aussi que les ensembles soient disjoints

A et D sont disjoints :
Ils n'ont aucun élément en commun

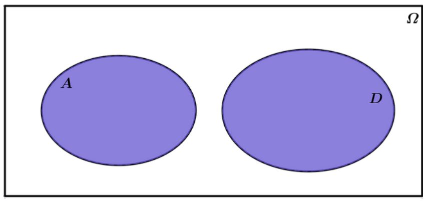


$A \cap D = \emptyset$
$\emptyset$ se lit « ensemble vide »



Ici, aucune couleur car aucun élément n'appartient à A **ET** D

$A \cup D$



On colorie bien sûr de la même couleur les éléments correspondant à la description.

II Vocabulaire des probabilités

Propriété n°1. La loi des grands nombres (simplifiée)

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une éventualité tend vers une « valeur idéale », appelée probabilité.

Définition n°1. Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Définition n°2. Événements élémentaires

Ce sont les « résultats possibles » ou « issues » ou « éventualités » de l'expérience aléatoire.

Définition n°3. Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des événements élémentaires. On le note généralement Ω .

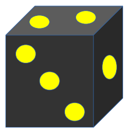
Définition n°4. Événements

Ce sont des sous-ensembles de l'univers que l'on peut décrire avec des événements élémentaires .

Exemple n°1. L'exemple du dé

On prend un dé bien équilibré à six faces. Notre **expérience aléatoire** consistera à le lancer et à relever le nombre de la face supérieure.

Ici on relève le nombre 2



Notre **univers** est alors composé de six nombres : $1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 4 \;;\; 5$ et 6
On écrira $\Omega = \{1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 4 \;;\; 5 \;;\; 6\}$
$\{1\} \;;\; \{2\} \;;\; \{3\} \;;\; \{4\} \;;\; \{5\}$ et $\{6\}$ sont des **événements élémentaires** avec lesquels on peut décrire des **événements** comme, par exemple :
Obtenir un nombre pair : $\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\} = \{2 \;;\; 4 \;;\; 6\}$

Définition n°5. Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est la donnée des probabilités de chaque événement élémentaire.

Propriété n°2.

La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

Propriété n°3.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple n°2. Avec l'exemple du dé

Loi de probabilité							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2 \;;\; 4 \;;\; 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

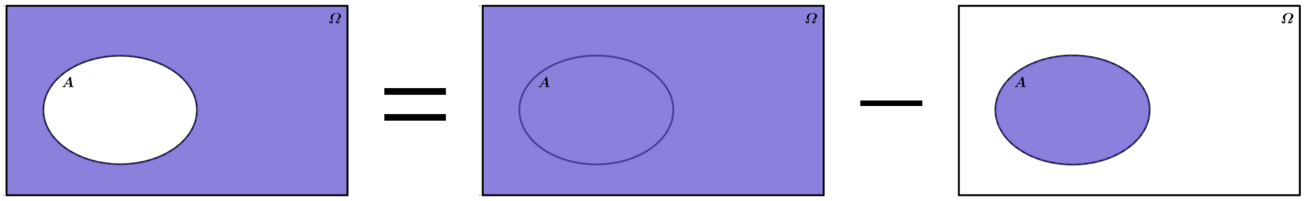
III Calculs de probabilité

III.1 Les formules à connaître

Dans cette partie, on se donne un univers Ω et deux événements A et B .

Propriété n°4.

$$p(\overline{A})=1-p(A)$$



Exemple n°3. ***Avec l'exemple du dé***

B : « Obtenir un multiple de trois »

$B = \{3\}\cup\{6\} = \{3 ; 6\}$

$p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\overline{B}$: « Ne pas obtenir un multiple de trois »

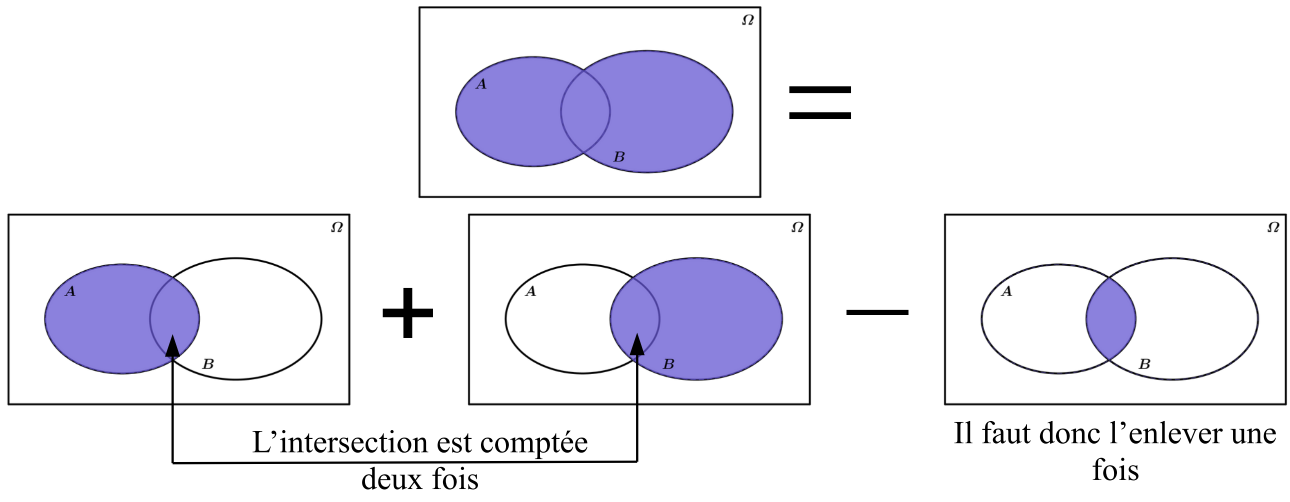
$\overline{B} = \underbrace{\Omega\backslash\{3 ; 6\}}_{\Omega \text{ privé de } \{3 ; 6\}} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$

$p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(On peut aussi calculer directement $p(\overline{B})$ mais ce n'est pas le but ici)

Propriété n°5.

$$p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B)$$



Exemple n°4. ***Avec l'exemple du dé***

$A \cap B = \{2 ; 4 ; 6\}\cap\{3 ; 6\} = \{6\}$ (seul 6 appartient à A **et** B)

$p(A \cap B)=p(\{6\})=\frac{1}{6}$ (En générale, la probabilité de l'intersection est facile à calculer).

$$p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B) = \frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Effectivement : $A \cup B = \{2 ; 4 ; 6\}\cup\{3 ; 6\} = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$

(On prend tous les éléments mais on ne les fait apparaître qu'une fois)

III.2 Équiprobabilité ou pas

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec un exemple d'équiprobabilité.
Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître donc tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Loi de probabilité avec le dé bien équilibré							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On peut aussi truquer (ou piper ou déséquilibrer) le dé. Dans ce cas, certaines faces « vont apparaître plus souvent » : certains événements élémentaires auront une probabilité plus grande que d'autres.
Par exemple :

Loi de probabilité avec un dé truqué							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

Avec cette loi de probabilité, la probabilité d'obtenir un nombre pair devient :

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{5}{18}+\frac{4}{18}+\frac{3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Nous retenons donc qu'avant de se lancer dans les calculs, on pensera à vérifier dans quel cas de figure on se trouve.
Par contre, une fois assuré d'être en situation d'équiprobabilité, on pourra utiliser la formule suivante :

En cas d'équiprobabilité : $\quad \textit{probabilité de } A = \dfrac{\textit{nombre d'éléments de } A}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$

Il existe une notation pour parler d'un nombre d'éléments d'un ensemble.

Définition n°6.

On note $Card(A)$ et on lit « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A .

Propriété n°6.

En situation d'équiprobabilité : $\quad p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Exemple n°5. ***avec le dé (équilibré ou pas)***

$Card(A)=3 \quad ; \quad Card(\overline{A})=3 \quad ; \quad Card(B)=2 \quad ; \quad Card(\overline{B})=4$
$Card(A\cap B)=1 \quad ; \quad Card(A\cup B)=4$ et $Card(\Omega)=6$

▪ Dans le cas du dé équilibré, on retrouve bien $\quad p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

▪ Par contre, cela ne fonctionne pas dans le cas du dé truqué.

Remarque n°1.

Dans le cadre d'une situation d'équiprobabilité, il suffira donc d'être capable de dénombrer (déterminer le nombre d'éléments de) les ensembles dont on cherche la probabilité.
Une fois que l'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité, on peut utiliser différentes techniques pour dénombrer.

IV Utiliser un tableau pour calculer une probabilité.

Exemple n°6. Le tableau à double entrée.

Voici un tableau à double entrée représentant la répartition de la LV1 dans une classe de seconde .

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	7	13	20
Anglais	9	4	13
Total	16	17	33

On choisit un élève au hasard (on suppose donc que chaque élève a la même chance d'être choisi).
On note :
F : « l'élève choisi est une fille »
E : « l'élève choisi pratique l'espagnol en LV1 »

Et on se propose de calculer la probabilité de quelques événements.

On décide de nommer Ω l'univers de expérience aléatoire.

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	$Card(E\cap F)$	$Card(E\cap \overline{F})$	$Card(E)$
Anglais	$Card(\overline{E}\cap F)$	$Card(\overline{E}\cap \overline{F})$	$Card(\overline{E})$
Total	$Card(F)$	$Card(\overline{F})$	$Card(\Omega)$

1) $p(F)=\dfrac{Card(F)}{Card(\Omega)}=\dfrac{16}{33}$

2) $F\cap E$: « L'élève choisi est une fille ET l'élève choisi pratique l'espagnol en LV1 »
(On préférera écrire : « l'élève choisi est une fille pratiquant l'espagnol en LV1 »)

$$p(F\cap E) = \frac{Card(F\cap E)}{Card(\Omega)} = \frac{7}{33}$$

Remarque n°2.

À ne pas confondre avec l'événement : « Parmi les filles, on a choisi une élève pratiquant l'espagnol » dont la probabilité sera notée (l'année prochaine)

$$p_F(E)=\frac{Card(E\cap F)}{Card(F)}=\frac{7}{16}$$

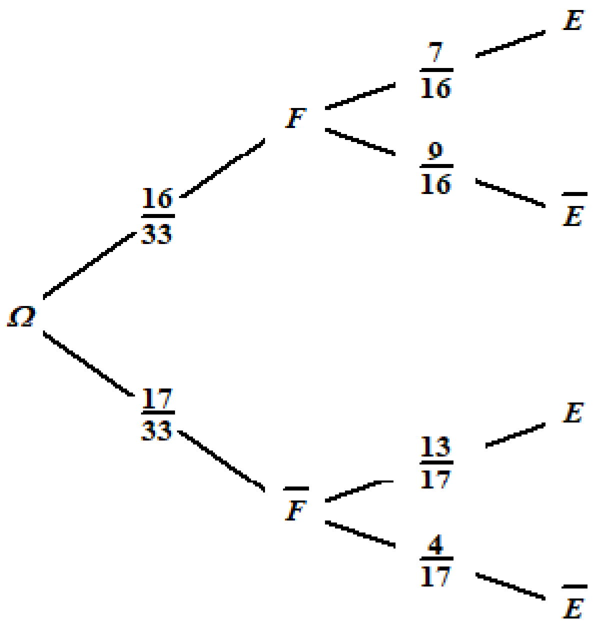
3) $p(F\cup E) = p(F)+p(E)-p(F\cap E) = \dfrac{16}{33}+\dfrac{20}{33}-\dfrac{7}{33} = \dfrac{29}{33}$

V Utiliser un arbre pour calculer une probabilité

On peut représenter l'exemple précédent avec un arbre pondéré.

Exemple n°7. ***Avec la même situation que dans l'exemple 6***

Si on décide de considérer l'événement F en premier :



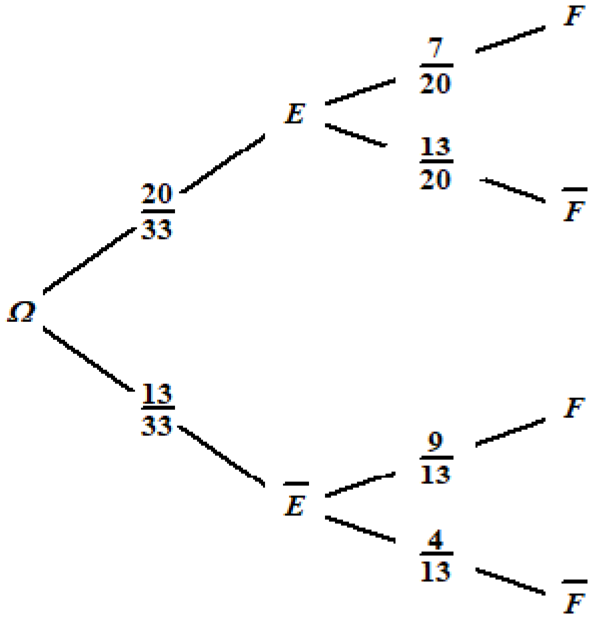
$$p(F\cap E)=\frac{16}{33}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{33}$$

$$p(F\cap\overline{E})=\frac{16}{33}\times\frac{9}{16}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$$

$$p(\overline{F}\cap E)=\frac{17}{33}\times\frac{13}{17}=\frac{13}{33}$$

$$p(\overline{F}\cap\overline{E})=\frac{17}{33}\times\frac{4}{17}=\frac{4}{33}$$

Si on décide de considérer l'événement E en premier :



$$p(F\cap E)=\frac{20}{33}\times\frac{7}{20}=\frac{7}{33}$$

$$p(\overline{F}\cap E)=\frac{20}{33}\times\frac{13}{20}=\frac{13}{33}$$

$$p(F\cap\overline{E})=\frac{13}{33}\times\frac{9}{13}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$$

$$p(\overline{F}\cap\overline{E})=\frac{13}{33}\times\frac{4}{13}=\frac{4}{33}$$

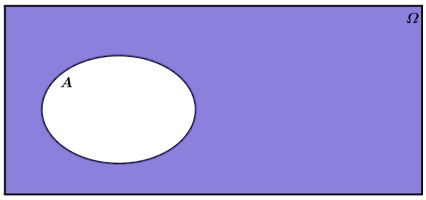
Les règles de calculs :
R1 :Tant qu'on suit une branche, on multiplie.
R2 : Deux branches différentes s'additionnent.
R3 : La somme des branches d'un nœud vaut toujours 1

VI Le résumé du cours

Le résumé n'est utile qu'après avoir lu (et relu et encore relu) le cours...

Le contraire de A

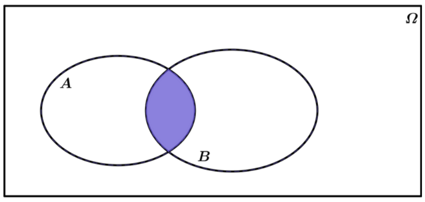
que l'on note $\overline{A}$
et que l'on lit : « A barre »



Ce sont tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .
On note aussi, parfois, $\Omega \backslash A$ qui se lit « Oméga privé de A »

L'intersection de A et B

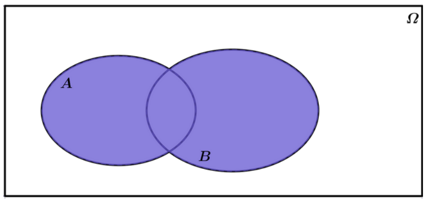
que l'on note $A \cap B$
et que l'on lit : « A inter B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **ET** B

L'union de A et B

que l'on note $A \cup B$
et que l'on lit : « A union B »



Ce sont tous les éléments qui appartiennent à A **OU** B
Attention, c'est un « ou » inclusif, vous verrez parfois écrit « et/ou » à la place de « ou » .

Formules toujours valables

$$\boldsymbol{p(\overline{A})=1-p(A)}$$

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B)}$$

Situation d'équiprobabilité

Loi de probabilité avec un dé bien équilibré							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si on appelle A : « Obtenir un nombre pair »

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On note $Card(A)$ et on lit « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A .

En situation d'équiprobabilité : $\boldsymbol{p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

Ω représente l'univers.

Situation de NON équiprobabilité

Loi de probabilité avec un dé truqué							
Événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	Total
Probabilité	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	1

Avec cette loi de probabilité, la probabilité d'obtenir un nombre pair devient :

$$p(A)=p(\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}) = p(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = \frac{5}{18}+\frac{4}{18}+\frac{3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Et bien sûr, il faut relire le paragraphe sur les **TABLEAUX** et celui sur les **ARBRES** qui ne se résument pas mais sont essentiels.