LA FONCTION CUBE

I Définition et étude de la fonction cube

Définition n°1.

La fonction cube est la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction sur D_f .
« f est impaire » signifie que : **Pour tout** $\boldsymbol{x \in D_f, f(-x)=-f(x)}$

Propriété n°1.

La fonction cube est impaire

preuve :

Notons g la fonction cube.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g=\mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^3 = -x\times(-x)\times(-x) = -x^3 = -g(x)$
Ainsi g est impaire.

Remarque n°1.

Si une fonction est impaire, alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

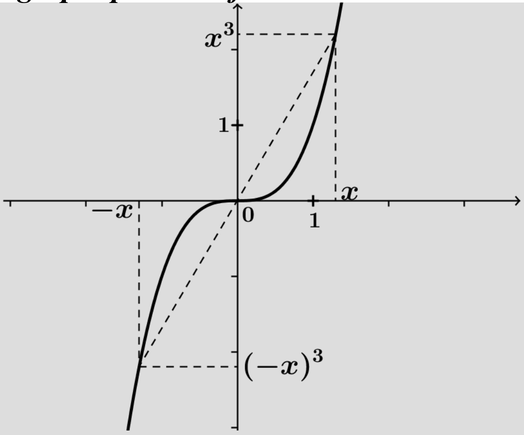
Propriété n°2. ***Variations de la fonction cube***

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

preuve :

Nous allons montrer que la fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (Cela suffira car les deux intervalles ont un point commun).
▪ Soient $a < b \leqslant 0$
Nous devons montrer que $a^3 < b^3$ ce qui équivaut à $a^3-b^3 < 0$.
Remarquons que : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Comme $a < b \Leftrightarrow a-b < 0$
De plus $a^2>0$, $b^2\geqslant 0$ et $ab\geqslant 0$ (car a et b sont de même signe)
Ainsi $a^2+ab+b^2 > 0$
D'après la règle des signes : $(a-b)(a^2+ab+b^2) < 0$
Et donc $a^3-b^3 < 0$.
La fonction cube bien strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$.
▪ La stricte croissance sur $[0 ; +\infty[$ se démontre de la même manière et est laissée à titre d'exercice.

Propriété n°3. ***La représentation graphique de la fonction cube***



L'origine du repère est le centre de symétrie de la courbe

Remarque n°2. ***Parité, imparité et représentation graphique***

Dans un repère orthogonal, on donne C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur D_f .

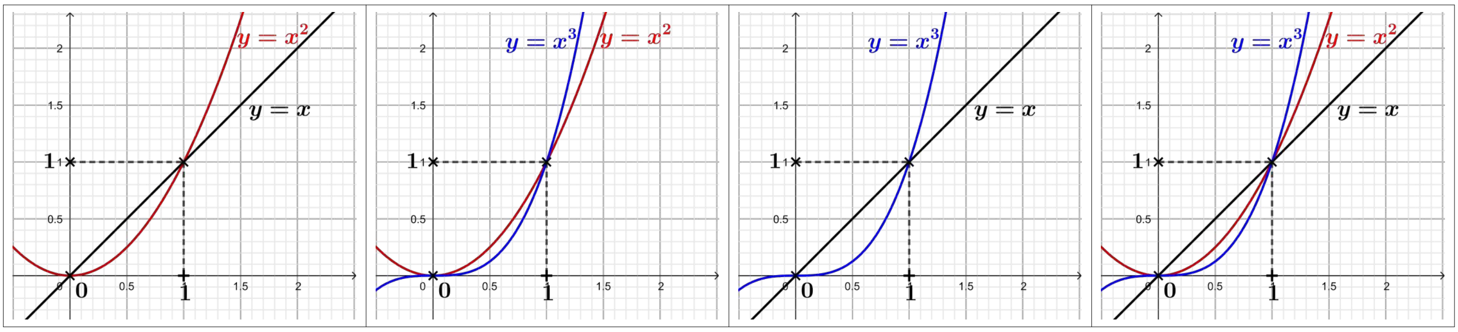
▪ Si f est **paire** alors C_f est **symétrique** par rapport à l'**axe** des ordonnées.
▪ Si f est **impaire** alors C_f est **symétrique** par rapport au **centre** du repère.

En images : [fonction paire] , [fonction impaire]

II Comparaison des fonctions identité, carré et cube

Propriété n°4.

▪ Pour $x \in]0\ ;\ 1[$, $x > x^2 > x^3$
▪ Pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $x < x^2 < x^3$
▪ Et bien sûr $0=0^2=0^3$ et $1=1^2=1^3$



preuve :

▪ Comparons $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ pour $x \in]0\ ;\ 1[$
$x^2 - x = x(x-1)$
$x > 0$ et $x - 1 < 0$
d'après la règle des signes : $x(x-1) < 0$ et donc $x^2 - x < 0$ ce qui équivaut à $x^2 < x$
La comparaison pour $x \in]0\ ;\ 1[$ de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ est laissée à titre d'exercice (la méthode est la même, faites le!).
On a donc bien, pour $x \in]0\ ;\ 1[$, $x > x^2 > x^3$

▪ Les comparaisons pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$ sont laissées à titre d'exercices (c'est encore la même méthode, faites le!)
On a donc bien, pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $x < x^2 < x^3$

▪ Enfin les égalités sont évidentes.