PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE M01

EXERCICE N°1 — VOIR LE CORRIGÉ

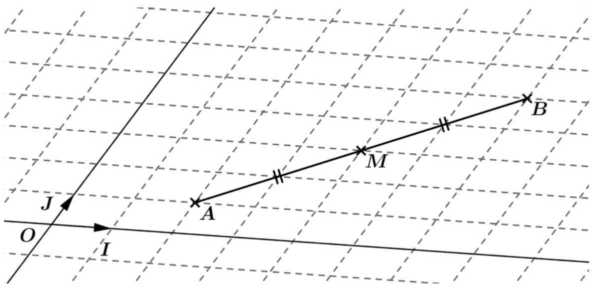
On munit le plan du repère $(O~;~I~;~J)$. On donne $A(1{,}25~;~-3{,}25)$, $M(-2{,}3~;~-13{,}9)$ et $B(15{,}2~;~38{,}6)$
Démontrez que A, B et M sont alignés.

EXERCICE N°2 Preuve de la propriété n°2 — VOIR LES CONSEILS

Réalisez un podcast de moins de deux minutes reprenant la démonstration de cet exercice :

On munit le plan du repère $(O~;~I~;~J)$.
On donne $A(x_A~;~y_A)$, $M(x_M~;~y_M)$ et $B(x_B~;~y_B)$.
Démontrez que si M est le **milieu** du segment $[AB]$ alors :

$\boxed{x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}}$ et $\boxed{y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}}$



EXERCICE N°3 — VOIR LE CORRIGÉ

Dans le repère orthonormé $(O~;I~;J)$.
On donne le triangle EFG rectangle en E tel que $E(26~;~18)$; $F(25~;~21)$ et $G(17~;~15)$.

1) Déterminer les coordonnées du point M centre du cercle circonscrit à EFG.

2) Le point $H(20;14)$ appartient-il au cercle ?

EXERCICE N°4 — VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(4~;~-1)$, $B(6~;~2)$ et $M(5~;~5)$.

1) La symétrie de centre A transforme B en C.

1.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
1.b) En déduire les coordonnées du point C.

2) Soit N le point tel que $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AN}$.

2.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?
2.b) Calculer les coordonnées du point N.

EXERCICE N°5 — VOIR LE CORRIGÉ

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3~;~3)$, $B(-2~;~6)$, $C(-8~;~8)$ et $D(-9~;~5)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ puis celles du milieu de $[BD]$.

2) Démontrer que $AC=BD$

3) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

EXERCICE N°1 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 1

On munit le plan du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. On donne $A(1{,}25\ ;\ -3{,}25)$, $M(-2{,}3\ ;\ -13{,}9)$ et $B(15{,}2\ ;\ 38{,}6)$
Démontrez que A, B et M sont alignés.

Nous allons démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, ce qui justifiera que les points sont alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 15{,}2 - 1{,}25 \\ 38{,}6 - (-3{,}25) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 13{,}95 \\ 41{,}85 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -2{,}3 - 1{,}25 \\ -13{,}9 - (-3{,}25) \end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -3{,}55 \\ -10{,}65 \end{pmatrix}$

De plus $det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AM}) = 13{,}95 \times (-10{,}65) - 41{,}85 \times (-3{,}55) = 0$

On en déduit que les points A, B et M sont alignés.

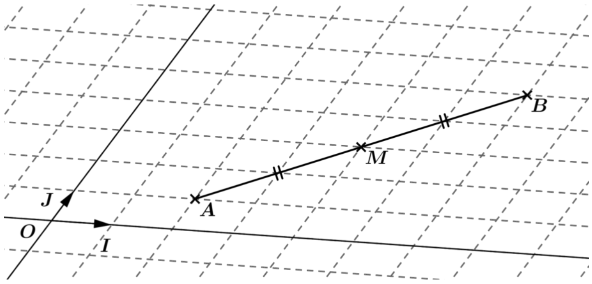
EXERCICE N°2 Preuve de la propriété n°2 (le podcast)

RETOUR À L'EXERCICE 2

Réalisez un podcast de moins de deux minutes reprenant la démonstration de cet exercice :

On munit le plan du repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
On donne $A(x_A\ ;\ y_A)$, $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.
Démontrez que si M est le **milieu** du segment $[AB]$ alors :

$\boxed{x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}}$ et $\boxed{y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}}$



Vous avez ci-dessous une démonstration possible. Elle peut structurer votre discours à condition de ne pas essayer de tout dire en même temps.
Vous pouvez, par exemple, vous concentrez uniquement sur les abscisses et utiliser à la fin une phrase ressamblant à « la méthode est identique pour les ordonnées ainsi l'ordonnée du point M sera la moyenne des ordonnées de A et B ».

On sait que :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Or :
M est le milieu de $[AB]$

Donc :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad .$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_M - x_A = \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ y_M - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B - x_A}{2} + x_A \\ y_M = \dfrac{y_B - y_A}{2} + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_A}{2} \end{cases}$$

Ainsi $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

EXERCICE N°3 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 3

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J\ )$.
On donne le triangle EFG rectangle en E tel que $E(26\ ;\ 18)$; $F(25\ ;\ 21)$ et $G(17\ ;\ 15)$.

1) Déterminer les coordonnées du point M centre du cercle circonscrit à EFG .

On sait que :
M est le centre du cercle circonscrit à EFG .
Donc M est le milieu de l'hypoténuse $[FG]$.
On en déduit en notant $M(x_M\ ;\ y_M)$

$$x_M = \frac{x_F+x_G}{2} = \frac{25+17}{2} = 21 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_F+y_G}{2} = \frac{21+15}{2} = 18$$

Ainsi $\boxed{M(21\ ;\ 18)}$

2) Le point $H(20;14)$ appartient-il au cercle ?

Si la distance MH est égale à la longueur du rayon du cercle alors H appartient à ce cercle.
Le rayon du cercle vaut par exemple MF :
Comme le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J\ )$ est orthonormé :

$$MF=\sqrt{(x_M-x_F)^2+(y_m-y_F)^2}=\sqrt{(21-25)^2+(18-21)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Calculons IH :

$$MH=\sqrt{(x_M-x_H)^2+(y_M-y_H)^2}=\sqrt{(21-20)^2+(18-14)^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}\approx 4{,}1$$

On a $MH \neq MF$ par conséquent H n'appartient pas au cercle.

EXERCICE N°4 (Le corrigé)

RETOUR À L'EXERCICE 4

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(4\ ;\ -1)$, $B(6\ ;\ 2)$ et $M(5\ ;\ 5)$.

1) La symétrie de centre A transforme B en C .

1.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

Par définition, « La symétrie de centre A transforme B en C » signifie que :
A est le milieu de $[BC]$
On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}}$

1.b) En déduire les coordonnées du point C .

On sait que :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 4-6 \\ -1-2 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 4 \\ y_C - (-1) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 4 \\ y_C + 1 \end{pmatrix}$$

Comme
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$
On obtient :

$$\begin{cases} x_C - 4 = -2 \\ y_C + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = -4 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{C(2\ ;\ -4)}$

2) Soit N le point tel que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$.

2.a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$?

On peut dire que les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AN} \text{ sont colinéaires}}$

2.b) Calculer les coordonnées du point N .

On sait que :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 5-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - x_A \\ y_N - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - 4 \\ y_N - (-1) \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N - 4 \\ y_N + 1 \end{pmatrix}$$

Comme
$\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$
On obtient :

$$\begin{cases} -2(x_N - 4) = 1 \\ -2(y_N + 1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_N + 8 = 1 \\ -2y_N - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_N = -7 \\ -2y_N = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 3{,}5 \\ y_N = -4 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{N(3{,}5\ ;\ -4)}$

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE M01C

EXERCICE N°5 ***(Le corrigé)*** RETOUR À L'EXERCICE 5

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3\ ;\ 3)$, $B(-2\ ;\ 6)$, $C(-8\ ;\ 8)$ et $D(-9\ ;\ 5)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ puis celles du milieu de $[BD]$.

Notons $M(x_M\ ;\ y_M)$ et $N(x_N\ ;\ y_N)$ les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

On a alors :

$$x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{-3+(-8)}{2} = -5{,}5 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{3+8}{2} = 5{,}5$$

Ainsi $\boxed{M(-5{,}5\ ;\ 5{,}5)}$

et

$$x_N = \frac{x_B+x_D}{2} = \frac{-2+(-9)}{2} = -5{,}5 \quad \text{et} \quad y_N = \frac{y_B+y_D}{2} = \frac{6+5}{2} = 5{,}5$$

Ainsi $\boxed{N(-5{,}5\ ;\ 5{,}5)}$.

2) Démontrer que $AC = BD$

On va calculer les deux longueurs et constater qu'elles sont égales :

$$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(-8-(-3))^2+(8-3)^2} = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50}$$

$$BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} = \sqrt{(-9-(-2))^2+(5-6)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$$

Ainsi $AC = BD$.

3) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

D'après la question 1) les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu et d'après la question 2, ils ont aussi la même longueur.

Le quadrilatère $ABCD$ a donc ses diagonales qui se coupent en milieu et qui de plus sont de même longueur.

On en déduit que $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle}}$.