LA FONCTION CARRÉ

I Définition et étude de la fonction carré

Définition n°1.

La fonction carré est la fonction définie par $g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^2\end{cases}$

Définition n°2.

Soit f une fonction définie sur D_f .
« f **est paire** » signifie que : **Pour tout** $\boldsymbol{x \in D_f,\ f(-x)=f(x)}$

Propriété n°1.

La fonction carré est paire.

preuve :

Notons g la fonction carré.
Soit $x \in \mathbb{R}$ (car $D_g=\mathbb{R}$)
$g(-x) = (-x)^2 = -x\times(-x) = x^2 = g(x)$
Ainsi g est paire.

Remarque n°1.

Si une fonction est paire alors son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.

Définition n°3. ***Croissance, décroissance***

Soit f une fonction définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

▪ « f est strictement croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

▪ « f est croissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▪ « f est strictement décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

▪ « f est décroissante sur I » signifie que :
Pour tous a et b appartenant à I , $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$

Remarque n°2.

On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Propriété n°2. ***Variations de la fonction carré***

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

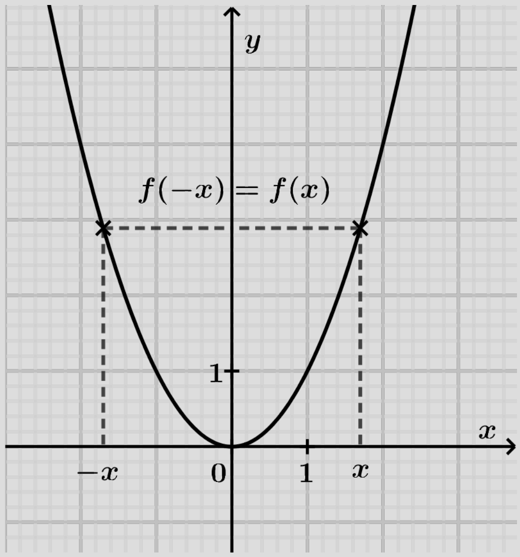
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

preuve :

▪ Soient $a < b \leqslant 0$
$f(a)-f(b) = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
Or $a+b<0$ (car a et b sont négatifs) et $a-b<0$ (car $a<b$)
Donc $(a+b)(a-b) > 0$ d'où on déduit que $f(a)>f(b)$
Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
▪ De la même manière, on démontre que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. (Cette seconde partie est laissée à titre d'exercice)

Définition n°4. ***Représentation graphique***

La représentation graphique de la fonction carré est une **parabole**



Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

Propriété n°3.

La représentation graphique de la fonction carré admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

II Équations et inéquations du second degré.

II.1 Encadrements d'un nombre réel et arrondis

Propriété n°4. ***Équation du type $x^2 = a$***

Soit a un nombre réel.
▪ Si $a > 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
▪ Si $a = 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ admet une solution : *zéro* .
▪ Si $a < 0$ alors :
l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

preuve :

▪ Le deuxième point est évident.
▪ Le troisième découle du fait que le carré d'un nombre réel est toujous positif.
▪ Pour le premier point :
si $a > 0$ alors $\sqrt{a}$ existe.
Les équations suivantes sont alors équivalentes :

$x^2 = a$

$x^2 - a = 0$

$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.
On en déduit que cette équation admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Remarque n°3.

Il est parfois utile de donner des valeurs approchées des solutions quand elles existent. c'est ce qui motive ce la suite de ce paragraphe.

Propriété n°5. ***(admise)***

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$

Définition n°5.

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\frac{a+1}{10^n}$

Exemple n°1.

$\frac{16812}{10^3} \leqslant 16{,}8127 < \frac{16813}{10^3}$ donc l'encadrement de 16,8127 à 10^{-3} est :
$16{,}812 \leqslant 16{,}8127 < 16{,}813$ et l'arrondi à 10^{-3} vaut 16,813.

II.2 *Inéquations du type* $x^2 \leqslant k$ et $x^2 \geqslant k$

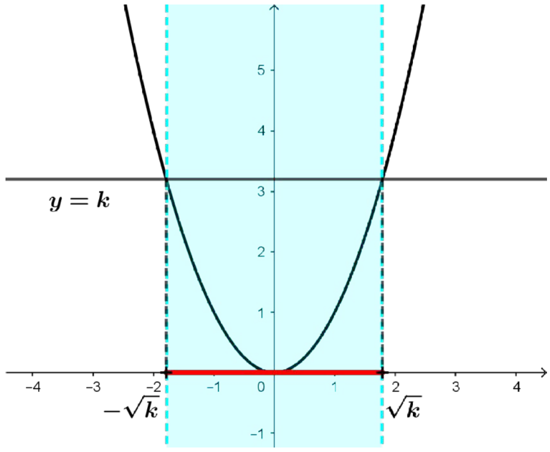
Propriété n°6.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \leqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors $S = [-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$

Si $k = 0$ alors $S = \{0\}$

Si $k < 0$ alors $S = \varnothing$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

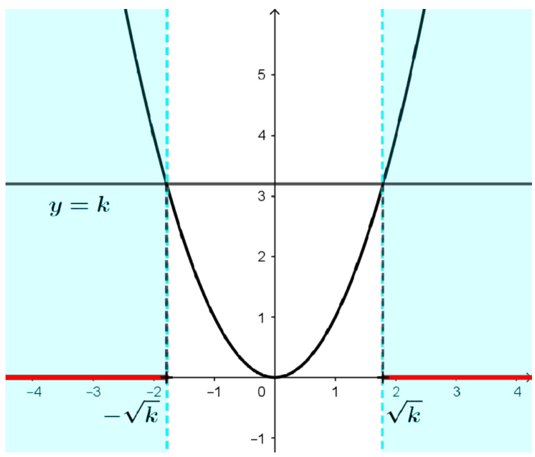
$$\begin{aligned}
& x^2 \leqslant k \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - k \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & ((x+\sqrt{k} \geqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \leqslant 0) \text{ ou } (x+\sqrt{k} \leqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \geqslant 0)) \\
\Leftrightarrow\ & ((x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \geqslant \sqrt{k})) \\
\Leftrightarrow\ & (x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k}) \qquad \text{(car l'autre cas est impossible)}
\end{aligned}$$

Propriété n°7.

Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 \geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k > 0$ alors
$S =]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k \leqslant 0$ alors $S = \mathbb{R}$



preuve :

Si $k=0$ c'est évident et si $k<0$ aussi. On suppose donc $k>0$.

$$\begin{aligned} & x^2 \geqslant k \\ \Leftrightarrow\ & x^2-k \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left((x+\sqrt{k} \geqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \geqslant 0) \text{ ou } (x+\sqrt{k} \leqslant 0 \text{ et } x-\sqrt{k} \leqslant 0)\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left((x \geqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \geqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k} \text{ et } x \leqslant \sqrt{k})\right) \\ \Leftrightarrow\ & (x \geqslant \sqrt{k}) \text{ ou } (x \leqslant -\sqrt{k}) \end{aligned}$$

Remarque n°4.

Dans les deux preuves précédentes, nous avons résolu des inéquations produits. La méthode utilisée peut-être résumée sous forme de tableau de signes. Ce qui motive le dernier paragraphe.

II.3 Inéquations produits.

Exemple n°2.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$(4x-7)(5-2x)(3x+2) \leqslant 0$$

Commençons par résoudre les inéquations suivantes :

$$4x-7>0 \Leftrightarrow 4x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$$

$$5-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>\frac{-2}{3}$$

« >0 » Nous indique où mettre les « + » dans le tableau de signes

Pour la dernière ligne, on utilise la règle des signes.

Dressons à présent le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$5-2x$		$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$(4x-7)(5-2x)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

En notant S l'ensemble des solutions :

$$S = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$$

Remarque n°5.

La méthode est la même quelque soit le nombre de facteurs.

III Le résumé du cours

La fonction carré

La fonction carré est la fonction définie par

$$g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$$

Elle est **paire** ce qui signifie que :

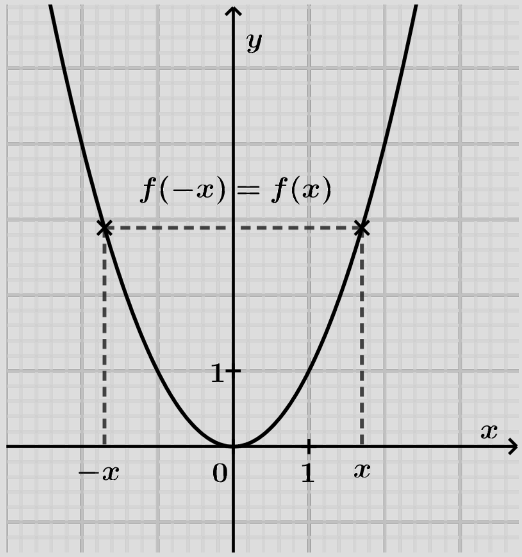
pour tout x, $g(-x)=g(x)$

Ses variations se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le point O, origine du repère est le **sommet de la parabole**.

L'**axe des ordonnées** est l'**axe de symétrie de la parabole.**



f une fonction et $I\subset D_f$ un intervalle, a,b dans I

Stricte croissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$
Stricte décroissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$
Croissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)\leqslant f(b)$
Décroissance sur I	$a<b\Rightarrow f(a)\geqslant f(b)$

Soit a un nombre réel.

- Si $a>0$ alors : l'équation $x^2=a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a=0$ alors : l'équation $x^2=a$ admet une solution : *zéro* .
- Si $a<0$ alors : l'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution.

Soit x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Il existe un unique nombre entier relatif a tel que : $\dfrac{a}{10^n}\leqslant x<\dfrac{a+1}{10^n}$

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près** .

L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\dfrac{a}{10^n}$ et $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Par convention, lorsque x est à égale distance de $\dfrac{a}{10^n}$ et de $\dfrac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\dfrac{a+1}{10^n}$

- Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2\leqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=[-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}]$

Si $k=0$ alors $S=\{0\}$

Si $k<0$ alors $S=\varnothing$

- Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2\geqslant k$ admet comme ensemble de solutions S :

Si $k>0$ alors $S=]-\infty\ ;\ -\sqrt{k}]\cup[\sqrt{k}\ ;\ +\infty[$

Si $k\leqslant 0$ alors $S=\mathbb{R}$