LA FONCTION CARRÉ M06

EXERCICE N°1

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $(5x+15)(x+2) < 0$

2) $(-4x+12)(x-3) \geqslant 0$

EXERCICE N°2

VOIR LE CORRIGÉ

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $x(-2x+1)+x(-3x+4) \leqslant 0$

2) $(2x-3)(x-5)+(2x-3)(3x+8) < 0$

3) $9x^2-(2x+4)^2 \leqslant 0$

4) $(x+a)^2 \geqslant 0$ où a est un nombre réel.

LA FONCTION CARRÉ M06C

EXERCICE N°1 ***(Le corrigé)*** RETOUR À L'EXERCICE 1

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $(5x+15)(x+2) < 0$ **2)** $(-4x+12)(x-3) \geqslant 0$

1)

Pour résoudre , $(5x+15)(x+2) < 0$ nous utilisons un tableau de signes :

- $5x+15 > 0 \Leftrightarrow 5x > -15 \Leftrightarrow x > -\frac{15}{5} = -3$

Pourquoi $>$? Parce qu'on cherche où mettre les « $+$ » dans le tableau.

- $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$5x+15$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(5x+15)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S =]-3\ ;\ -2[}$.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $S =]-3\ ;\ -2[$
$5x+15$ est toujours strictement négatif, $x-4$ est toujours négatif, cela nous permet d'affirmer que la règle des signes donnera toujours le même résultat : « $+$ ».
On peut raisonner de la même façon, sur chaque intervalle de la première ligne du tableau. C'est en cela que le tableau est utile…
Il n'y a plus qu'à lire la dernière pour trouver le(s) intervalle(s) vérifiant l'inégalité de départ.

2)

Pour résoudre , $(-4x+12)(x-3) \geqslant 0$ nous utilisons un tableau de signes :

- $-4x+12 > 0 \Leftrightarrow -4x > -12 \Leftrightarrow x < \frac{-12}{-4} = 3$
- $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Tiens tiens, la même valeur…

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-4x+12$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$(-4x+12)(x-3)$		$-$	0	$-$	

En notant S l'ensemble des solutions : $\boxed{S = \{3\}}$.

On peut aussi procéder comme suit si on a pensé à factoriser. :
$(-4x+12)(x-3) = -4(x-3)(x-3) = -4(x-3)^2$
Or pour tout réel x , $(x-3)^2 \geqslant 0$ d'où $-4(x-3)^2 \leqslant 0$
(Ainsi, on sait que $(-4x+12)(x-3) \leqslant 0$ et on veut $(-4x+12)(x-3) \geqslant 0$ la seule possibilité est donc $(-4x+12)(x-3) = 0$)
On en déduit que l'inéquation $(-4x+12)(x-3) \geqslant 0$ n'admet qu'une $\boxed{\text{seule solution : } 3}$

LA FONCTION CARRÉ M06C

EXERCICE N°2 (Le corrigé) RETOUR À L'EXERCICE 2

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1) $x(-2x+1)+x(-3x+4) \leqslant 0$ **2)** $(2x-3)(x-5)+(2x-3)(3x+8) < 0$

3) $9x^2-(2x+4)^2 \leqslant 0$

4) $(x+a)^2 \geqslant 0$ où a est un nombre réel.

1)

Pour tout réel x ,

$x(-2x+1)+x(-3x+4) = x[(-2x+1)+(-3x+4)] = x(-5x+5)$

On en déduit que $x(-2x+1)+x(-3x+4) \leqslant 0 \Leftrightarrow x(-5x+5) \leqslant 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les même solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes).

- $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (élémentaire mon cher Watson...)
- $-5x+5 > 0 \Leftrightarrow -5x > -5 \Leftrightarrow x < \dfrac{-5}{-5}=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-5x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x(-5x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $x(-2x+1)+x(-3x+4) \leqslant 0$ admet comme ensemble des solutions :

$\boxed{]-\infty\ ;\ 0] \cup [1\ ;\ +\infty[}$

2)

Pour tout réel x ,

$(2x-3)(x-5)+(2x-3)(3x+8) = (2x-3)[(x-5)+(3x+8)] = (2x-3)(4x+3)$

On en déduit que $(2x-3)(x-5)+(2x-3)(3x+8) < 0 \Leftrightarrow (2x-3)(4x+3) < 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les même solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes).

- $2x-3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}=1{,}5$
- $4x+3 > 0 \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{4}=-0{,}75$

x	$-\infty$		$-0{,}75$		$1{,}5$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x+1)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que admet $(2x-3)(x-5)+(2x-3)(3x+8) < 0$ comme ensemble des solutions :

$\boxed{]-0{,}75\ ;\ 1{,}5[}$

3)

Pour tout réel x ,

$\underbrace{9x^2}_{a^2}-\underbrace{(2x+4)^2}_{b^2} = \underbrace{(3x)^2}_{a^2}-\underbrace{(2x+4)^2}_{b^2} = [(3x)+(2x+4)][(3x)-(2x+4)] = (5x+4)(x-4)$

On en déduit que $3x^2-(2x+4)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (5x+4)(x-4) \leqslant 0$

Et on va résoudre cette dernière inéquation (qui possède les même solutions que la première puisqu'elles sont équivalentes)… On commence à le savoir !

- $5x+4 > 0 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{5}=-0,8$
- $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

x	$-\infty$		$-0,8$		4		$+\infty$
$5x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(3x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que a $9x^2-(2x+4)^2 \leqslant 0$ admet comme ensemble des solutions :
$\boxed{[-0,8 \ ; 4]}$

4)

Le carré d'un nombre (réel) étant toujours positif (pas forcément strictement…), on en déduit que $(x+a)^2 \geqslant 0$ admet pour ensemble des solutions $\mathbb{R}$

Un trou de mémoire pour $\mathbb{R}$? C'est ici

Et si on avait eu : $(x+a)^2 > 0$?
Dans ce cas il aurait fallu exclure l'opposé de a de l'ensemble des solutions
(car $-a+a=0$ et 0 n'est pas strictement plus grand que 0…)
L'ensemble des solutions aurait été $\mathbb{R}\backslash\{-a\} =]-\infty \ ; -a[\cup]-a \ ; +\infty[$
Voici quelques exemples avec des valeurs numériques avec S l'ensemble des solutions :

$(x+1)^2 > 0 \qquad S = \mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty \ ; -1[\cup]-1 \ ; +\infty[$

$(x-1)^2 > 0 \qquad S = \mathbb{R}\backslash\{1\} =]-\infty \ ; 1[\cup]1 \ ; +\infty[$

$(x+7,3)^2 > 0 \qquad S = \mathbb{R}\backslash\{-7,3\} =]-\infty \ ; -7,3[\cup]-7,3 \ ; +\infty[$

$(x-7,3)^2 > 0 \qquad S = \mathbb{R}\backslash\{7,3\} =]-\infty \ ; 7,3[\cup]7,3 \ ; +\infty[$