LES VECTEURS

I Translations et vecteurs

Définition n°1. ***Translation qui transforme A en B.***

On considère deux points A et B du plan.
On appelle translation qui transforme A en B la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

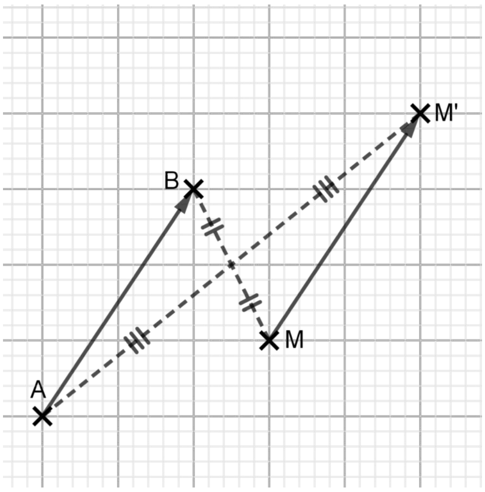


Figure 1

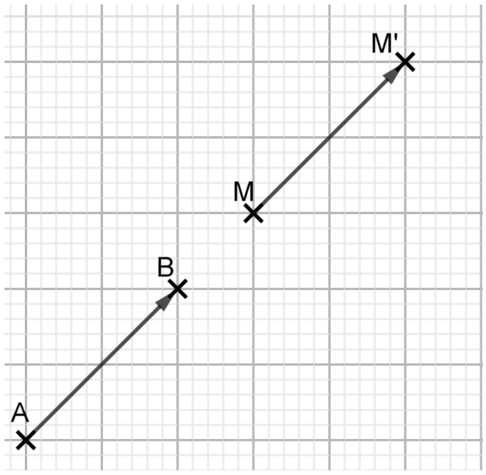


Figure 2

Le point M' est l'image du point M par la translation qui transforme A en B.

Remarque n°1.

Une translation est entièrement définie par la donnée de 3 informations :
- Une direction : on se déplace parallèlement à la droite (AB) ,
- Un sens : on se déplace comme de A vers B
- Une longueur : la distance parcourue est la même que la longueur AB.

Définition n°2. ***Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, associé à la translation qui transforme A en B.***

On considère deux points A et B du plan.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la donnée des 3 informations qui caractérisent la translation qui transforme A en B.
- On le représente par une flèche comme sur les figures 1 et 2.
- A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B est son extrémité.

Définition n°3. ***Vecteurs égaux***

Deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

Propriété n°1.

Soient A, B, C et D quatre points.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ $ABDC$ est un parallélogramme.

preuve :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ $(AB)//(DC)$
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ ABDC est non croisé.
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ $AB=DC$

  Le quadrilatère ABDC, non croisé, a deux cotés opposés parallèles et de même longueur.
  C'est un parallélogramme.

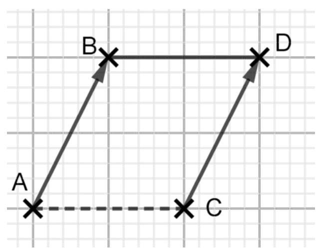


Figure 3

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftarrow$ ABDC est un parallélogramme

Le quadrilatère $ABDC$ étant un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles et égaux. En particulier $(AB)//(DC)$ et $AB=DC$
Enfin le nom $ABDC$ nous indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens.
Ainsi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

II Vecteurs et opérations

Définition n°4. Addition de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations associées et $t_{\vec{w}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$ (Pour tout point X $t_{\vec{w}}(X)=t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(X))$)

$$\vec{u}+\vec{v}\overset{\text{def}}{=}\vec{w}$$

Remarque n°2.

Cette définition un peu théorique ne nous servira pas cette année.
En revanche, la propriété suivante nous sera bien plus utile...

Propriété n°2. La relation de Chasles

Soient A, B et C trois points.

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

preuve :

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ se résume par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(Pour comprendre la définition : $t_{\overrightarrow{BC}}\circ t_{\overrightarrow{AB}}=t_{\overrightarrow{AC}}$)

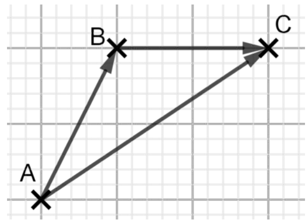


Figure 4

Propriété n°3. Règle du parallélogramme (somme de deux vecteurs de même origine)

Soient A, B et C trois points.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

preuve :

- ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
- D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
- Il suffit alors de remplacer $\overrightarrow{BD}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans l'égalité précédente pour obtenir $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

(Il faut surtout retenir le dessin et l'égalité)

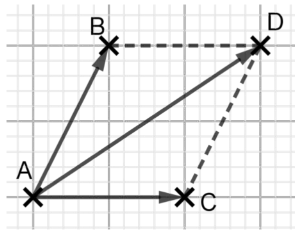


Figure 5

Définition n°5. Vecteur opposé, vecteur nul

Soit $\vec{u}$ un vecteur, on appelle **vecteur opposé à $\vec{u}$**
et on note $-\vec{u}$ le vecteur
→ qui a même direction et même longueur (ou norme) que $\vec{u}$
→ mais dont le sens est opposé à celui de $\vec{u}$

On alors $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
$\vec{0}$ est appelé le **vecteur nu**l.

Exemple n°1.

$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$
mais aussi
$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$
ou encore
$-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$
(pensez bien au fait que le sens du vecteur se lit en suivant la flèche au dessus des lettres)

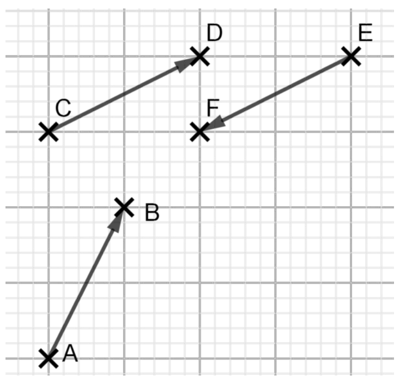


Figure 6

Définition n°6. ***Soustraction de vecteurs***

Pour soustraire un vecteur, on ajoute son opposé.

Exemple n°2.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Propriété n°4. ***Vecteurs et milieu***

Soit A, I et B trois points.

$$\boxed{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]}$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. (Inspirez vous de la propriété n°1)

Définition n°7. ***Multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre)***

Soit $\vec{u}$ et k un nombre réel. On appelle produit de $\vec{u}$ par k
et on note $k\cdot\vec{u}$ le vecteur
qui a la même direction que $\vec{u}$,
qui a le même sens que $\vec{u}$ si $k>0$,ou le sens contraire si $k<0$
et dont la norme (la longueur) est multipliée par la distance à zéro de k .

Exemple n°3.

On peut écrire :

$\overrightarrow{CD}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH} = -0{,}5\cdot\overrightarrow{FE} = -\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{FE}$

Par contre,
Il n'existe pas de nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{EF}$
(car ces vecteurs n'ont pas la même direction)

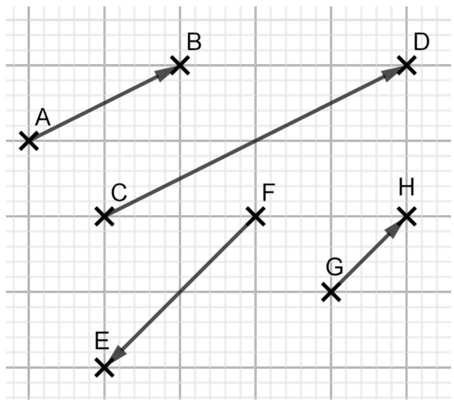


Figure 7

Remarque n°3.

Il faut bien comprendre que nous avons multiplié un vecteur par nombre et que cela n'a rien à voir avec le fait de multiplier deux vecteurs entre eux. Il faudra avancer un peu dans les maths pour en parler…

III Vecteurs et coordonnées

Dans un repère $(O ; I ; J)$, on définit deux « vecteurs de base » :
$\vec{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{OJ}$

Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ quelconque, la relation de Chasles nous permet d'écrire : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
avec C étant choisi tel que (AC) // (OI) et (CB) // (OJ).
On a alors :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = 6\cdot\vec{e_1}-4\cdot\vec{e_2}$
On écrira plus simplement :
$\overrightarrow{AB}\ (6 ; -4)$ ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

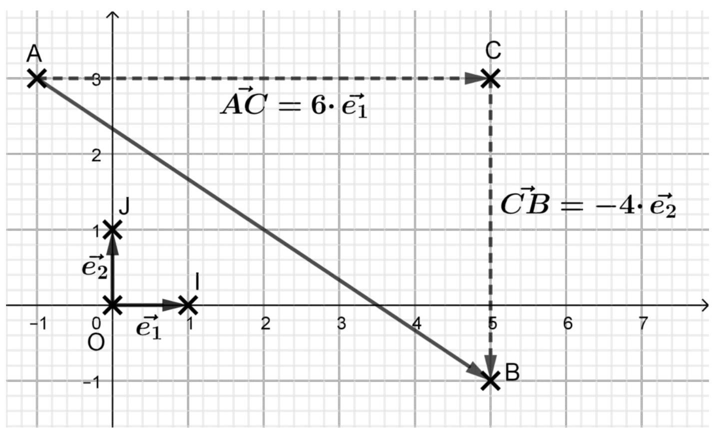


Figure 8

Définition n°8. Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on définit deux « vecteurs de base » : $\vec{e_1}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{e_2}=\overrightarrow{OJ}$. Alors, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux nombres x et y tel que $\vec{u}=x\cdot\vec{e_1}+y\cdot\vec{e_2}$

On appellera :

x l'abscisse de $\vec{u}$

y l'ordonnée de $\vec{u}$

$(x\ ,\ y)$ ou $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}\ ,\ \vec{e_2})$

Remarque n°4.

Comme pour les points, on notera indifféremment $\vec{u}(x\ ,\ y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Méthode n°1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Exemple n°4.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}5-(-1)\\-1-3\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

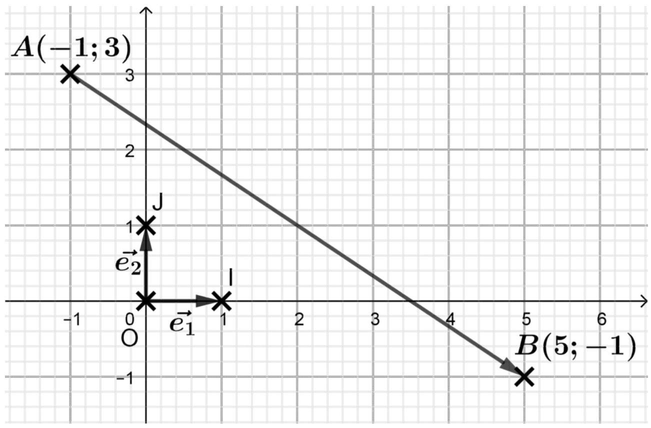


Figure 9

Propriété n°5. Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Les coordonnées de K milieu de $[AB]$ sont $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

preuve :

Notons $K(x_K\ ;\ y_K)$.

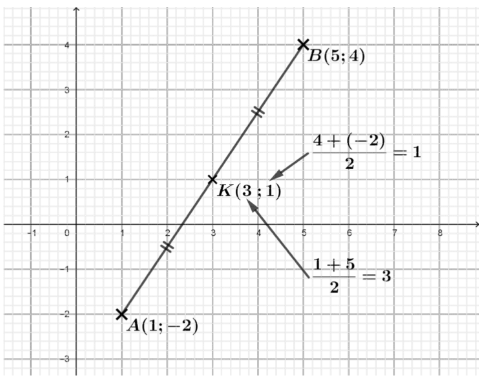
K milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_A-x_K+x_B-x_K=0\\y_A-y_K+y_B-y_K=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_A+x_B-2x_K=0\\y_A+y_B-2y_K=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_A+x_B=2x_K\\y_A+y_B=2y_K\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=x_K\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B}{2}=y_K\end{cases}$



Propriété n°6. ***Opérations et coordonnées de vecteur***

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ des vecteurs ainsi qu'un nombre k .

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{-\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{k\cdot\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}k\,a\\k\,b\end{pmatrix}}$$

preuve :

Laissée à titre d'exercice. Revenez à la définition n°8 et utilisez les définitions du deuxième paragraphe.

Exemple n°5.

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2{,}1\\2{,}3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}$ alors , par exemple :

$$3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}3\times(-2{,}1)\ -\ 2\times3\\3\times2{,}3\ -\ 2\times1{,}5\end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix}-12{,}3\\3{,}9\end{pmatrix}$$

Remarque n°5.

Le vecteur nul $\boxed{\vec{0} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

Propriété n°7. ***Calcul de la norme d'un vecteur***

Dans un repère ORTHONORME $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

alors la norme (ou longueur) de $\vec{u}$, qui se note $\|\vec{u}\|$, s'obtient grâce à l'égalité :

$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

preuve :

On utilise la décomposition de la figure n°8 et on applique le théorème de Pythagore au triangle ABC qui est rectangle en C car le repère est orthonormé.

IV La colinéarité

Définition n°9. ***Vecteurs colinéaires***

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs
On dit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\\ \text{si et seulement si}\\ \text{il existe un nombre } k \text{ tel que } \vec{u}=k\cdot\vec{v}\end{array}}$$

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Remarque n°6.

D'après la définition n°7, des vecteurs colinéaires sont des vecteurs qui ont la même direction.

Définition n°10. Déterminant de deux vecteurs

Soient $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ le nombre

$$\boxed{\mathbf{det}(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = ad - bc}$$

Exemple n°6.

Dans la base orthonormée $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$, pour $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$:

$$det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 4\times 5-(-2)\times 3 = 26$$

Propriété n°8.

Dans la base orthonormée , $(\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ on se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0}$$

preuve :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, alors il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v} \iff a=kc$ et $b=kd$

▪ Si $c=0$ alors $a=k\times 0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $d=0$ alors $b=k\times 0=0$ et $ad-bc=0$

▪ Si $c\neq 0$ et $d\neq 0$ alors $\dfrac{a}{c}=k=\dfrac{b}{d}$, d'après l'égalité des produits en croix : $ad=bc$ qui équivaut à $ad-bc=0$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftarrow$ $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$

$ad-bc=0$ équivaut à $ad=bc$

▪ Si $c\neq 0$ et $d\neq 0$ alors on pose $k=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

ainsi $a=kc$ et $b=kd \iff \vec{u}=k\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Si $c=0$ alors $ad=0$ et $a=0$ ou $d=0$

 ▪ Si $d=0$ alors $\vec{v}=\vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

 ▪ Si $a=0$ et $d\neq 0$ alors on pose $k=\dfrac{b}{d}$ ainsi

 $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

▪ Les autres cas, $d=0$, $a=0$ et $b=0$ se traitent de la même façon et on obtient que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode n°2. Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ou non.

Énoncé :

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, déterminer le coefficient de proportionnalité.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-18\end{pmatrix}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}12\\-7\end{pmatrix}$

Réponse :

1) $det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})=2\times(-18)-6\times(-6)=0$

On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\dfrac{2}{-6}=\dfrac{6}{-18}=-\dfrac{1}{3}$

On précise que $\vec{u}=-\dfrac{1}{3}\cdot\vec{v}$

2) $det(\vec{w}\ ,\ \vec{z})=-5\times(-7)-3\times 12 = -1 \neq 0$

On en déduit que $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

V Le résumé du cours

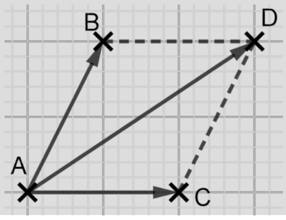
Un vecteur c'est trois informations
- Une direction (on se déplace sur une droite)
- Un sens (sur cette droite on choisit un sens)
- Une norme ou longueur

Soient A, B, C et D quatre points.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Règle du parallélogramme



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

Vecteur opposé : $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ même direction, même norme, sens contraire

Vecteur nul : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\ldots$

$\boxed{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \iff I \text{ est le milieu de } [AB]}$

$\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \iff I \text{ est le milieu de } [AB]}$

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on se donne $A(x_A\ ;\ y_A)$; $B(x_B\ ;\ y_B)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

et si $K(x_K\ ;\ y_K)$ est le milieu de $[AB]$: $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

On se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ des vecteurs ainsi qu'un nombre k .

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

$k\cdot\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k\,a \\ k\,b \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
si et seulement si
il existe un nombre k tel que $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\iff det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})=ad-bc=0$

Si le repère est ORTHONORME $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$