Les vecteurs M05

Exercice 1

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nul du plan. Deux vecteurs sont dits **colinéaire** s'il existe un nombre réel k tels que : $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

Le nombre réel k s'appelle le **coefficient de colinéarité** de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs réalisant l'égalité :
$2\,\vec{u}=3\,\vec{v}$
Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et que leur coefficient de colinéarité est $\dfrac{3}{2}$.

2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs réalisant l'égalité :
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$.
Justifier que ces deux vecteurs sont colinéaires.

3. Pour chacune des questions ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Déterminer la valeur du coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $\dfrac{1}{2}\cdot\vec{u}=\dfrac{3}{4}\cdot\vec{v}$ b. $3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}=\vec{0}$

c. $3\cdot\left(\vec{u}-2\cdot\vec{v}\right)=\vec{0}$ d. $-2\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}$

Correction 1

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient la relation :
$$2\cdot\vec{u}=3\cdot\vec{v} \implies \vec{u}=\frac{3}{2}\cdot\vec{v}$$
Cette égalité, de la forme $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$, permet d'affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\dfrac{3}{2}$.

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient :
$$\vec{u}+\vec{v}=0 \implies \vec{u}=-\vec{v} \implies \vec{u}=-1\times\vec{v}$$
Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est -1.

3. Nous devons transformer chacune des égalités sous la forme :
$\vec{u}=k\cdot\vec{v}$
afin de mettre en évidence le coefficient k de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $$\frac{1}{2}\cdot\vec{u}=\frac{3}{4}\cdot\vec{v}$$
$$\vec{u}=2\times\frac{3}{4}\cdot\vec{v}$$
$$\vec{u}=\frac{3}{2}\cdot\vec{v}$$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\dfrac{3}{2}$.

b. $$3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}=\vec{0}$$
$$3\cdot\vec{u}=2\cdot\vec{v}$$
$$\vec{u}=\frac{2}{3}\cdot\vec{v}$$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\dfrac{2}{3}$.

c. $$3\cdot\left(\vec{u}-2\cdot\vec{v}\right)=\vec{0}$$
$$\vec{u}-2\cdot\vec{v}=\vec{0}$$
$$\vec{u}=2\cdot\vec{v}$$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est 2.

d. $$-2\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}$$
$$-2\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}=2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}$$
$$-2\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{u}=3\cdot\vec{v}+2\cdot\vec{v}$$
$$-4\cdot\vec{u}=5\cdot\vec{v}$$
$$\vec{u}=\frac{5}{-4}\cdot\vec{v}$$
$$\vec{u}=-\frac{5}{4}\cdot\vec{v}$$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $-\dfrac{5}{4}$.

Exercice 2

Pour chaque question, déterminer si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
S'ils le sont, donner le coefficient associé de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $\vec{u}(-1\,;2)$; $\vec{v}(4\,;-8)$ b. $\vec{u}(3\,;2)$; $\vec{v}(9\,;4)$

c. $\vec{u}(2\,;3)$; $\vec{v}(4{,}2\,;6{,}3)$ d. $\vec{u}(0{,}7\,;4{,}1)$; $\vec{v}(-2{,}8\,;16{,}4)$

Correction 2

a. Les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car ils vérifient la relation :
$$\vec{u}=-\frac{1}{4}\cdot\vec{v}$$
Le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est -4.

b. On remarque qu'avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\dfrac{1}{3}\vec{v}\left(3\,;\dfrac{4}{3}\right)$
Le vecteur $\dfrac{1}{3}\vec{v}$ a même abscisse que le $\vec{u}$ mais n'ont pas la même ordonnée.
- $\dfrac{1}{2}\vec{v}\left(\dfrac{9}{2}\,;2\right)$
Le vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{v}$ a même ordonnée que le vecteur $\vec{v}$ mais n'ont pas la même abscisse.

Ainsi, il est impossible de déterminer un nombre réel k réalisant l'égalité :
$\vec{u}=k\cdot\vec{v}$
On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

c. Les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car ils vérifient la relation :
$$\vec{u}=\frac{1}{2{,}1}\cdot\vec{v}$$

Le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\dfrac{1}{2{,}1}$.

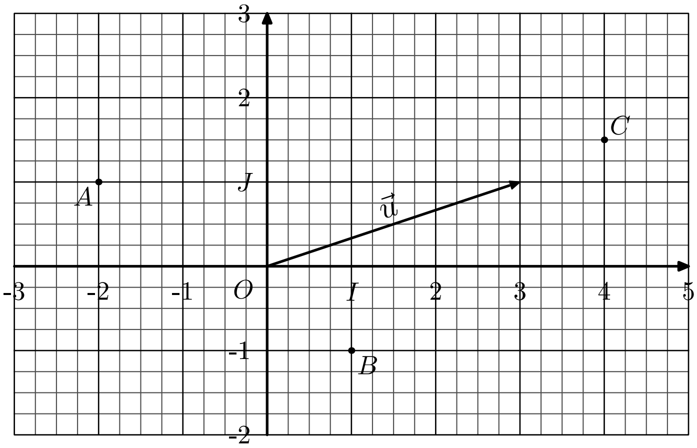
d. On remarque les relations suivantes :

- $\dfrac{1}{4}\vec{v}(-0{,}7\,;4{,}1)$ qui a la même ordonnée que le vecteur $\vec{u}$ mais pas la même abscisse.
- $-\dfrac{1}{4}\vec{v}(0{,}7\,;-4{,}1)$ qui a la même abscisse que le vecteur $\vec{u}$ mais pas la même ordonnée.

L'impossibilité de déterminer un réel k vérifiant la relation $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$, nous permet d'affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 3

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et on considère les points A, B et C ci-dessous :



1. a. Donner les coordonnées des points A, B et C.

   b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   c. En déduire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ défini par : $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{BC}$

2. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Correction 3

1. a. Par lecture graphique, on a les coordonnées des points :
   $A(-2\,;1)\quad;\quad B(1\,;-1)\quad;\quad C(4\,;1{,}5)$

   b. On a les coordonnées des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
     $=(1-(-2)\,;-1-1)=(3\,;-2)$
   - $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B\,;y_C-y_B)$
     $=(4-1\,;1{,}5-(-1))=(3\,;2{,}5)$

   c. Le vecteur $2\cdot\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées :
   $2\cdot\overrightarrow{BC}(2\times3\,;2\times2{,}5)=(6\,;5)$
   On en déduit les coordonnées du vecteur $\vec{v}$:
   $\vec{v}(3+6\,;-2+5)=(9\,;3)$

2. Par lecture graphique, les coordonnées de $\vec{u}$ sont : $\vec{u}(3\,;1)$

   Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, s'il existe un réel k réalisant l'égalité : $\vec{v}=k\cdot\vec{u}$

   Considérons le vecteur $3\cdot\vec{u}$ qui a pour coordonnées : $3\cdot\vec{u}(3\times3\,;3\times1)=(9\,;3)$

   On en déduit l'égalité : $\vec{v}=3\cdot\vec{u}$

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les cinq points :
$A(2\,;-2)\,;B(11\,;-14)\,;C(-3\,;1)\,;D(5\,;3)\,;E(12\,;-19)$

Parmi les quatre vecteurs ci-dessous, un seul est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{BC}\quad;\quad\overrightarrow{CD}\quad;\quad\overrightarrow{DE}\quad;\quad\overrightarrow{CE}$

Lequel? Justifier votre réponse.

Correction 4

On a les coordonnées de vecteur :

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(11-2\,;-14-(-2))$
  $=(9\,;-12)$
- $\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\,;y_C-y_B)=(-3-11\,;1-(-14))$
  $=(-14\,;15)$
- $\overrightarrow{CD}=(x_D-x_C\,;y_D-y_C)=(5-(-3)\,;3-1)=(8\,;2)$
- $\overrightarrow{DE}=(x_E-x_D\,;y_E-y_D)=(12-5\,;-19-3)=(7\,;-22)$
- $\overrightarrow{CE}=(x_E-x_C\,;y_E-y_C)=(12-(-3)\,;-19-1)$
  $=(15\,;-20)$

En remarquant que : $\overrightarrow{CE}=\dfrac{5}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$

On en déduit que l'unique vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{CE}$.

Exercice 5

Proposition : Dans le plan muni d'un repère, on considère les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires entre eux si, et seulement si, leur déterminant est nul.

On considère le plan muni d'un repere $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ et les quatre points :

$A(3\,;-5)\quad;\quad B(1\,;-1)\quad;\quad C(13\,;2)\quad;\quad D(18\,;-8)$

Etablir que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Correction 5

Voici les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
  $= (1-3\,;\,-1-(-5)) = (-2\,;4)$
- $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C\,;y_D - y_C)$
  $= (18-13\,;\,-8-2) = (5\,;\,-10)$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour valeur :
$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = -2\times(-10) - 4\times 5 = 20 - 20 = 0$

D'après le critère de colinéarité, on en déduit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 6

On munit le plan d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$:

Montrer que les points suivants sont alignés :
$A(-3\,;-1)\quad;\quad B(1\,;5)\quad;\quad C(-1\,;2)$

Correction 6

On a les coordonnées suivantes de vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
  $= (1-(-3)\,;5-(-1)) = (1+3\,;5+1) = (4\,;6)$
- $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$
  $= (-1-(-3)\,;2-(-1)) = (-1+3\,;2+1) = (2\,;3)$

Le déterminant de ces deux vecteurs a pour valeur :
$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = 4\times 3 - 2\times 6 = 12 - 12 = 0$

D'après le critère de colinéarité, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Ainsi, les droites (AB) et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles et ont le point A en commun. On en déduit que les points A, B, C sont alignés.

Exercice 7

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$.
Soit A, B, C et D quatre points du plan de coordonnées :

$A(-5\,;1)\quad;\quad B(2\,;4)\quad;\quad C(-1\,;-2)\quad;\quad D(3\,;y_D)$

Déterminer les coordonnées du point D tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles et que le point D ait 3 pour abscisse.

Correction 7

On a les coordonnées de vecteurs suivant :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (2-(-5)\,;4-1) = (7\,;3)$
- $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C\,;y_D - y_C)$
  $= (3-(-1)\,;y_D-(-2)) = (4\,;y_D+2)$

Les droites (AB) et (CD) étant parallèles, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

D'après le critère de colinéarité, on a le déterminant de ces deux vecteurs est nul :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) &= 0\\
7\cdot\left(y_D+2\right) - 4\times 3 &= 0\\
7\cdot y_D + 14 - 12 &= 0\\
7\cdot y_D + 2 &= 0\\
7\cdot y_D &= -2\\
y_D &= -\frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Le point D a pour coordonnées $D\left(3\,;-\frac{2}{7}\right)$.

Exercice 8

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$.
Soit A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives : $(4\,;-1)\quad;\quad(1\,;3)\quad;\quad(1\,;-2)$

Déterminer les coordonnées du point D tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles et que le point D ait 3 pour abscisse.

Correction 8

On a les coordonnées de vecteurs suivant :

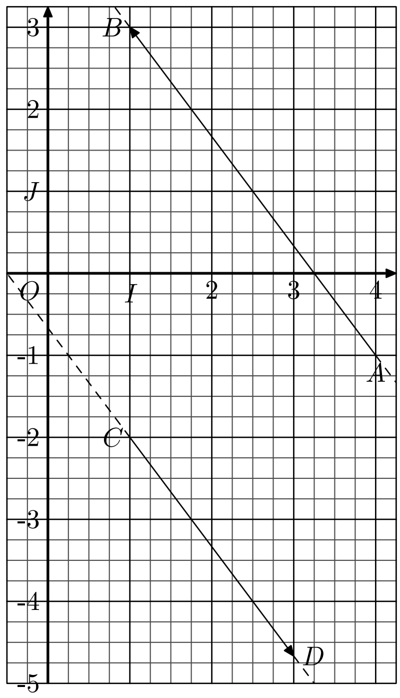
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
  $= (1-4\,;3-(-1)) = (-3\,;4)$
- $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C\,;y_D - y_C)$
  $= (3-1\,;y_D-(-2)) = (2\,;y_D+2)$

Pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

Ainsi, d'après le critère de colinéaire, il faut que le déterminant de ces deux vecteurs soit nul :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) &= 0\\
-3\left(y_D+2\right) - 2\times 4 &= 0\\
-3y_D - 6 - 8 &= 0\\
-3y_D - 14 &= 0\\
-3y_D &= 14\\
y_D &= \frac{14}{-3}\\
y_D &= -\frac{14}{3}
\end{aligned}$$

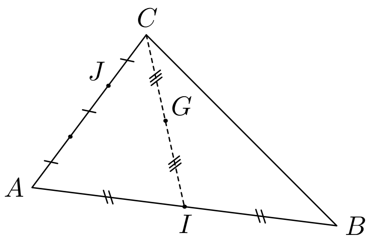
Le point D a pour coordonnées $D\left(3\,;-\frac{14}{3}\right)$.



Exercice 9

On considère le triangle ci-contre où I et G sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CI]$, le point J est défini par la relation :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$$



On considère la base vectorielle $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ dans la base vectorielle $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$.

2. Etablir que la décomposition vectorielle du vecteur $\overrightarrow{AG}$:
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$$

3. En déduire l'alignement des points B, G, J.

Correction 9

Une video est accessible

1.
- D'après l'énoncé, le point I est le milieu du segment $[AB]$:
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$$
- Par définition, on a : $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$

  On a les manipulations algébriques suivantes :
$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$

2. Le point G étant le milieu du segment $[IC]$, on a :
$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{IC}$$
On a les manipulations suivantes :
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\cdot\Big(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}\Big)$$
$$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\Big) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

3. On a les décompositions suivantes :
- $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \Big(\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\Big)$
$$= -\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$$
- $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$

On remarque que :
$$\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\cdot\Big(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}\Big) = -\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$= -\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BG}$$

