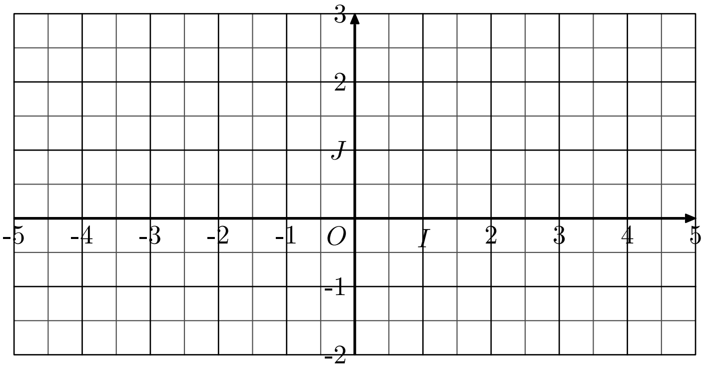
# Les vecteurs M04

## Exercice 1

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et les deux points $A$ et $B$ de coordonnées : $A(-2\,;-1)$ ; $B(2\,;1)$

1. Placer les points $A$ et $B$ dans le repère ci-dessous :



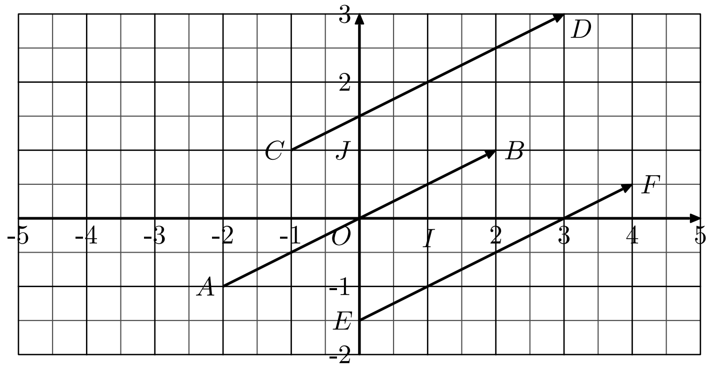

2. Soit $C(-1\,;1)$ un point du plan.

   Sans justification, donner les coordonnées du point $D$ tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

3. Soit $F(4\,;0{,}5)$ un point du plan.

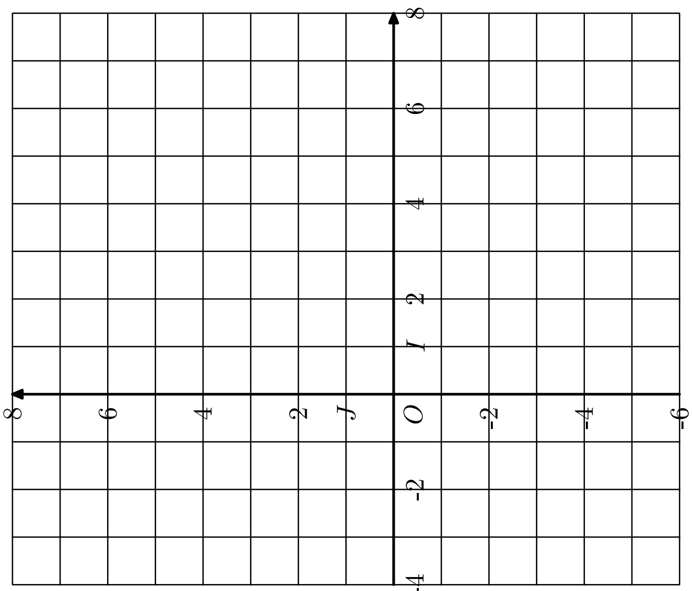
   Sans justifications, donner les coordonnées du point $E$ tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$

## Correction 1




## Exercice 2

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :




On considère les trois points $A$, $B$, $C$ de coordonnées respectives $(2\,;-2)$, $(-3\,;4)$, $(2\,;1)$.

Considérons le point $D$ tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme ; notons $(x_D\,;y_D)$ les coordonnées du point $D$ :

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Justifier que les coordonnées du point $D$ vérifient les deux égalités suivantes :

   $$2-x_D=-5 \quad ; \quad 1-y_D=6$$

3. En déduire les coordonnées du point $D$.

## Correction 2

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

   $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
   $=(-3-2\,;4-(-2))=(-5\,;6)$

2. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées :

   $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D)=(2-x_D\,;1-y_D)$

   Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. On en déduit l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

   Deux vecteurs égaux ayant les mêmes coordonnées, les égalités des abscisses et des ordonnées de ces deux vecteurs permettent d'obtenir les relations suivantes :

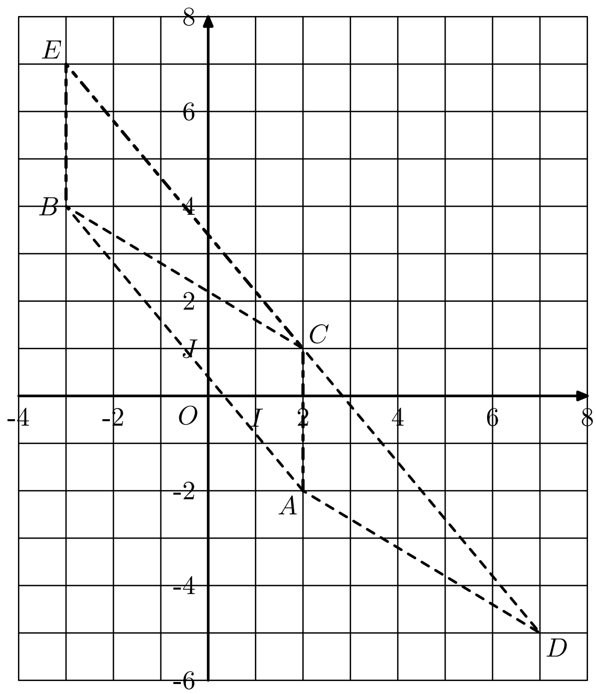
   $2-x_D=-5$ ; $1-y_D=6$

3. On en déduit les coordonnées du point $D$ :

   | | |
   |---|---|
   | $2-x_D=-5$ | $1-y_D=6$ |
   | $-x_D=-5-2$ | $-y_D=6-1$ |
   | $-x_D=-7$ | $-y_D=5$ |
   | $x_D=7$ | $y_D=-5$ |

   Le point $D$ a pour coordonnées $D(7\,;-5)$ :

Voici la représentation de ces deux quadrilatères :



## Exercice 3

On munit le plan d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ :

1. Soit $A(3\,;1)$, $B(5\,;-2)$, $C(-1\,;0)$ trois points du plan.
   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. Soit $D$ un point du plan réalisant l'égalité : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$
   Déterminer les coordonnées du point $D$.
2. Soit $E(12{,}1\,;34)$, $F(25{,}4\,;10{,}5)$ et $G(30\,;-2)$.
   Déterminer les coordonnées du point $H$ afin que le quadrilatère $EFGH$ soit un parallélogramme.

## Correction 3

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(5-3\,;\,-2-1)$
   $=(2\,;-3)$
   b. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C)=(x_D-(-1)\,;y_D-0)$
   $=(x_D+1\,;y_D-0)$
   De l'égalité $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ et en identifiant les abscisses et les ordonnées des deux membres de l'égalité, on obtient les deux égalités :

| | |
|---|---|
| $x_D+1=2$ | $y_D=-3$ |
| $x_D=2-1$ | |
| $x_D=1$ | |

   Ainsi, le point $D$ réalisant l'égalité vectorielle a pour coordonnées :
   $D(1\,;-3)$
2. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{EF}(x_F-x_E\,;y_F-y_E)=(25{,}4-12{,}1\,;10{,}5-34)$
   $=(13{,}3\,;-23{,}5)$
   Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{HG}(x_G-x_H\,;y_G-y_H)$
   $=(30-x_H\,;-2-y_H)$
   Le quadrilatère $EFGH$ étant un parallélogramme, on doit avoir l'égalité vectorielle :
   $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$
   En identifiant les abscisses et ordonnées des vecteurs des deux membres de cette équation, on obtient les deux égalités :

| | |
|---|---|
| $30-x_H=13{,}3$ | $-2-y_H=-23{,}5$ |
| $-x_H=13{,}3-30$ | $-y_H=-23{,}5+2$ |
| $-x_H=-16{,}7$ | $-y_H=-21{,}5$ |
| $x_H=16{,}7$ | $y_H=21{,}5$ |

   Les coordonnées du point $H$ sont $H(16{,}7\,;21{,}5)$.

## Exercice 4

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les points : $A(1\,;2)$ ; $B(-1\,;4)$ ; $C(-2\,;1)$

On considère un point $K$ tel que $ACBK$ soit un parallélogramme :

1. Donner une relation vectorielle caractérisant le point $K$.
2. Déterminer les coordonnées du point $K$.

## Correction 4

1. Pour que $ACBK$ soit un parallélogramme, il est nécessaire d'avoir l'égalité : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{KB}$.
2. Déterminons les coordonnées de ces deux vecteurs :
   - $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)$
     $=(-2-1\,;1-2)=(-3\,;-1)$
   - $\overrightarrow{KB}(x_B-x_K\,;y_B-y_K)$
     $=(-1-x_k\,;4-y_K)$

   Or, deux vecteurs égaux ont les même coordonnées : on en déduit les deux équations suivantes :

| | |
|---|---|
| $-3=-1-x_K$ | $-1=4-y_K$ |
| $-x_K=-3+1$ | $-y_K=-1-4$ |
| $-x_K=-2$ | $-y_K=-5$ |
| $x_K=2$ | $y_K=5$ |

   Le point $K$ a pour coordonnées $(2\,;5)$

## Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points suivants :

$$A\Big(-\frac{1}{3}\,;\frac{3}{5}\Big)\quad ;\quad B\Big(\frac{7}{2}\,;-\frac{2}{5}\Big)\quad ;\quad C\Big(-\frac{5}{3}\,;2\Big)$$

Déterminer les coordonnées du point $D$ tels que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

## Correction 5

Notons $(x_D\,;y_D)$ les coordonnées du point $D$. On a les coordonnées de vecteurs :

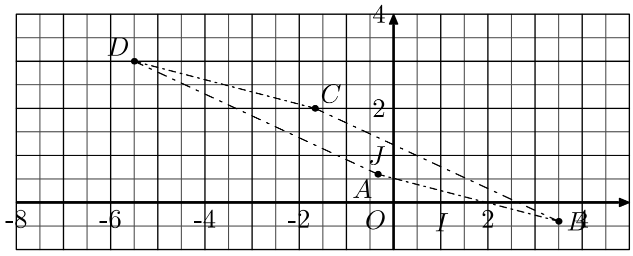
- $\overrightarrow{AB}\Big(\frac{7}{2}-\Big(-\frac{1}{3}\Big)\,;-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\Big)=\Big(\frac{7}{2}+\frac{1}{3}\,;-\frac{5}{5}\Big)$
  $=\Big(\frac{21}{6}+\frac{2}{6}\,;-1\Big)=\Big(\frac{23}{6}\,;-1\Big)$
- $\overrightarrow{DC}\Big(-\frac{5}{3}-x_D\,;2-y_D\Big)$

Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme, on en déduit l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
Ainsi, leurs coordonnées sont égaltes. On obtient les deux égalités :

| | |
|---|---|
| $-\frac{5}{3}-x_D=\frac{23}{6}$ | $2-y_D=-1$ |
| $-x_D=\frac{23}{6}+\frac{5}{3}$ | $-y_D=-1-2$ |
| $-x_D=\frac{23}{6}+\frac{10}{6}$ | $-y_D=-3$ |
| $-x_D=\frac{33}{6}$ | $y_D=3$ |
| $x_D=-\frac{11}{2}$ | |

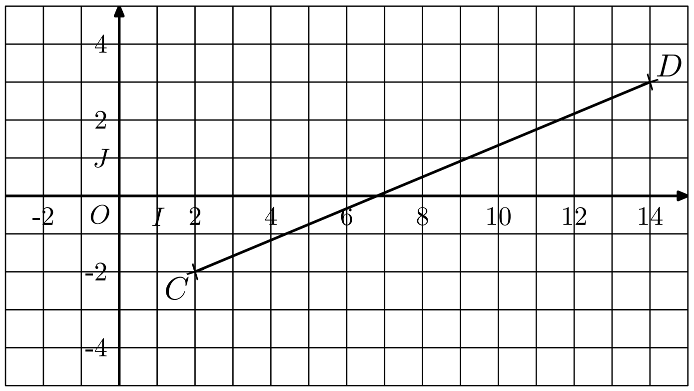
Le point $D$ a pour coordonnées $\left(-\frac{11}{2}\,;3\right)$.




---

## *Exercice 6*

On considère le plan muni du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous :




1. Le but de cette question est de déterminer la longueur du segment $[CD]$ :

   a. Donner les coordonnées des points $C$ et $D$.

   b. Placer le point $E(14\,;-2)$. Quelle est la nature du triangle $CDE$?

   c. Donner les mesures des segments $[CE]$ et $[ED]$.

   d. A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la longueur du segment $[CD]$.

2. Placer les points $F(-2\,;4)$ et $G(13\,;-4)$ dans le repère. Par une démarche similaire, montrer que : $FG=17$

3. Soient $A$ et $B$ deux points quelconques du plan de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$.

   Justifier que la distance $AB$ en fonction de $x_A$, $x_B$, $y_A$ et $y_B$ s'exprime par :

   $$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

4. Utiliser la formule pour établir que : $CG=\sqrt{125}$

## *Correction 6*

1. a. On a les coordonnées suivantes :
   $C(2\,;-2)$ ; $D(14\,;3)$

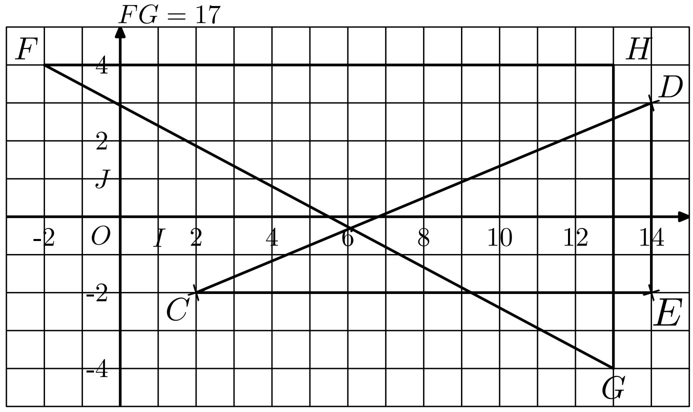
   b. Le triangle $CDE$ est rectangle en $E$.
   L'explication n'est pas exigible mais rel‘eve d'une argumentation simple pour un élève de seconde :

   - Les points $C$ et $E$ ont même ordonnée, donc la droite $(CE)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
   - Les points $D$ et $E$ ont même abscisse, donc la droite $(DE)$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
   - Le repère étant orthogonal *(en fait orthonormé)*, les axes forment un angle droite ; il en va de même pour les droites $(CE)$ et $(DE)$.

   c. Les points $C$ et $E$ sont sur une même droite parallèle à l'axe des abscisses. La distance $CE$ est égale à l'écart entre les abscisses de ces points :
   $14-2=12$.
   Les points $D$ et $E$ sont sur une même droite parallèle à l'axe des ordonnées. La distance $DE$ est égale à l'écart entre les ordonnées de ces points :
   $3-(-2)=5$.

   d. Le triangle $CDE$ est rectangle en $E$.
   D'après le théorème de Pythagore, on a :
   $CD^2=CE^2+DE^2$
   Une application numérique donne :
   $$CD^2=12^2+5^2$$
   $$CD^2=144+25$$
   $$CD^2=169$$
   $$CD=13$$

2. b. En considérant le point $H(13\,;4)$, le triangle $FGH$ est rectangle en $H$.
   D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :
   $FG^2=FH^2+HG^2$
   L'application numérique donne :
   $$FG^2=[13-(-2)]^2+[4-(-4)]^2$$
   $$FG^2=15^2+8^2$$
   $$FG^2=225+64$$
   $$FG^2=289$$
   $$FG=17$$




3. Soient $A$ et $B$ deux points quelconques du plan de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$. Considérons le point $M$ tel que : $M(x_B\,;y_A)$
   Le triangle $ABM$ est rectangle en $M$ ; ainsi, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle $ABM$, on a :
   $AB^2=AM^2+BM^2$
   Utilisons leurs coordonnées pour illustrer ce calcul :
   $$AB^2=\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_B\right)^2$$
   $$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2$$
   $$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2$$
   $$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

4. Utilisons la formule avec les points $C$ et $G$:

$CG = \sqrt{\left(x_G - x_C\right)^2 + \left(y_G - y_C\right)^2}$

$= \sqrt{(13-2)^2 + \left[-4-(-2)\right]^2} = \sqrt{11^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{121+4} = \sqrt{125}$

L'expression de la longueur $CG$ se simplifie en:

$CG = \sqrt{125} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$

## Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les deux points $A$ et $B$ dont les coordonnées sont:

$A\left(\frac{11}{3}\,;3\right) \quad ; \quad B\left(\frac{5}{3}\,;\frac{3}{2}\right)$

Déterminer la mesure du segment $[AB]$.

## Correction 7

La formule du calcul de la distance donne:

$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{5-11}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{2^2 + \frac{9}{4}} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{4}}$

$= \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$

## Exercice 8

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-3\,;-2)$ et de rayon 5, le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $B(4\,;1)$ et de rayon 3 et le point $C$ de coordonnées $C(1\,;1)$.

1. a. Montrer que le point $C$ appartient aux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

   b. Montrer que le point $D\left(\frac{56}{29}\,;-\frac{34}{29}\right)$ est le second point d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2. Justifier que le triangle $ABC$ n'est pas un triangle rectangle.

## Correction 8

1. a. On a les distances:

   - $AC = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2}$

   $= \sqrt{\left[1-(-3)\right]^2 + \left[1-(-2)\right]^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2}$

   $= \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

   On en déduit que le point $C$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   - $BC = \sqrt{\left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2}$

   $= \sqrt{(1-4)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$

   $= \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$

   On en déduit que le point $C$ appartient au cercle $\mathscr{C}'$.

   b. On a les distances:

   - $AD = \sqrt{\left(x_D - x_A\right)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2}$

   $= \sqrt{\left[\frac{56}{29} - (-3)\right]^2 + \left[-\frac{34}{29} - (-2)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{56}{29} + \frac{87}{29}\right)^2 + \left(-\frac{34}{29} + \frac{58}{29}\right)^2}$

   $= \sqrt{\left(\frac{56+87}{29}\right)^2 + \left(\frac{-34+58}{29}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{143}{29}\right)^2 + \left(\frac{24}{29}\right)^2}$

   $= \sqrt{\frac{20\,449}{841} + \frac{576}{841}} = \sqrt{\frac{21\,025}{841}} = \sqrt{25} = 5$

   - $BD = \sqrt{\left(x_D - x_A\right)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2}$

   $= \sqrt{\left(\frac{56}{29} - 4\right)^2 + \left(-\frac{34}{29} - 1\right)^2} = x = \sqrt{\left(\frac{56}{29} - \frac{116}{29}\right)^2 + \left(-\frac{34}{29} - \frac{29}{29}\right)^2}$

   $= \sqrt{\left(\frac{56-116}{29}\right)^2 + \left(\frac{-34-29}{29}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-60}{29}\right)^2 + \left(\frac{-63}{29}\right)^2}$

   $= \sqrt{\frac{3\,600}{841} + \frac{3\,969}{841}} = \sqrt{\frac{7569}{841}} = \sqrt{9} = 3$

2. Déterminons la mesure du segment $[AB]$:

   $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

   $= \sqrt{\left[4-(-3)\right]^2 + \left[1-(-2)\right]^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (1+2)^2}$

   $= \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

   On a les longueurs au carré du triangle $ABC$:

   $AB^2 = 58 \quad ; \quad AC^2 = 25 \quad ; \quad BC^2 = 9$

   On remarque que l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée:

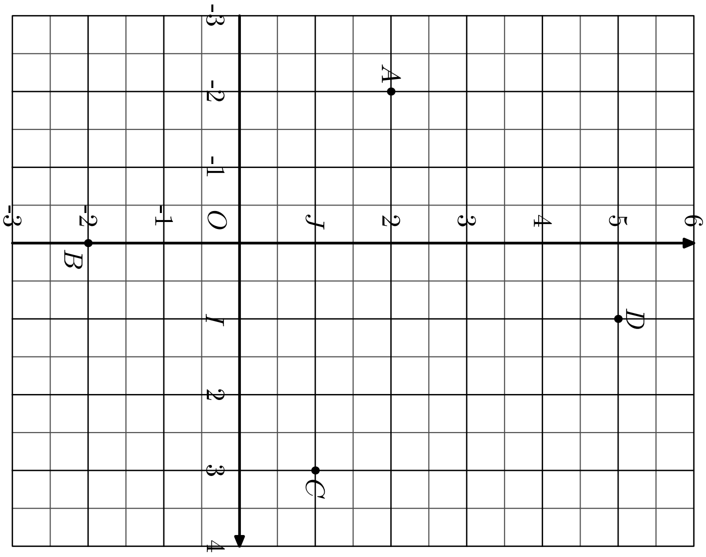
   - $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$
   - $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$
   - $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$

   D'après la contraposé du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle $ABC$ n'est pas rectangle.

## Exercice 9

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et des quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ indiqués ci dessous:



1. Déterminer les coordonnées de ces points.
2. a. Soit $K$ le milieu du segment $[AC]$, déterminer les coordonnées de $K$.
   b. Soit $L$ le milieu de $[BD]$, déterminer les coordonnées du point $L$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

## Correction 9

1. Voici les coordonnées des quatre points de cette figure :

   $A(-2\,;2)$ ; $(0\,;-2)$ ; $(3\,;1)$ ; $(1\,;5)$

2. a. Le milieu $K$ du segment $[AC]$ a pour coordonnée :

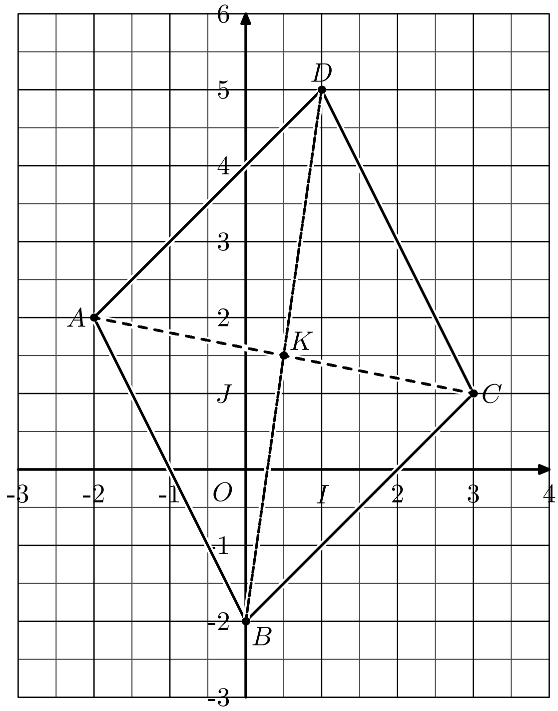
$$K\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{-2+3}{2}\,;\frac{2+1}{2}\Big)=\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\Big)$$

   b. Le milieu $L$ du segment $[BD]$ a pour coordonnée :

$$L\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)=\Big(\frac{0+1}{2}\,;\frac{(-2)+5}{2}\Big)=\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\Big)$$

3. On remarque que les points $K$ et $L$ ont même coordonnée, ils sont confondus : $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leurs milieux.

   Le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux.
   Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors c'est un parallélogramme.
   On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.




## Exercice 10

On considère les quatre points suivants caractérisés par leurs coordonnées dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :

$A(-4\,;-1)$ ; $B(-3\,;-4)$ ; $C(3\,;-2)$ ; $D(2\,;1)$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

## Correction 10

La résolution de cet exercice s'effectue en deux étapes :

- Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnée :

$$\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{(-4)+3}{2}\,;\frac{(-1)+(-2)}{2}\Big)=\Big(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\Big)$$

  Le milieu de $[BD]$ a pour coordonnée :

$$\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)=\Big(\frac{(-3)+2}{2}\,;\frac{(-4)+1}{2}\Big)=\Big(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\Big)$$

  Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
  Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
  $ABCD$ est un parallélogramme.

- Calculons maintenant les longueurs des diagonales :

  - $$AC=\sqrt{\big(x_C-x_A\big)^2+\big(y_C-y_A\big)^2}=\sqrt{\big[3-(-4)\big]^2+\big[(-2)-(-1)\big]^2}=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$$

    La longueur $AC$ admet pour expression simplifiée :
    $AC=\sqrt{50}=\sqrt{5^2\times2}=5\sqrt{2}$

  - $$BD=\sqrt{\big(x_D-x_B\big)^2+\big(y_D-y_B\big)^2}=\sqrt{\big[(-3)-2\big]^2+\big[(-4)-1\big]^2}=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$

    Comme pour la longueur $BD$, on a la simplification :
    $BD=5\sqrt{2}$

  On a : $AC=BD$
  Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.
  $ABCD$ est en fait un rectangle.

**Exercice 11**

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les trois points :

$A(5\,;-2)$ ; $B(-1\,;3)$ ; $C(2{,}2\,;4{,}9)$

1. Déterminer la longueur du segment $[AB]$.

2. Déterminer les coordonnées du milieu $K$ du segment $[BC]$.

**Correction 11**

1. La longueur du segment $[AB]$ se détermine par la formule :

$$AB = \sqrt{\big(x_B-x_A\big)^2+\big(y_B-y_A\big)^2} = \sqrt{\big(-1-5\big)^2+\big[3-(-2)\big]^2}$$
$$= \sqrt{\big(-6\big)^2+\big(3+2\big)^2} = \sqrt{36+5^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$$

2. Le milieu $K$ du segment $[BC]$ se déterminer par la formule :

$$K\Big(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\Big) = \Big(\frac{-1+2{,}2}{2}\,;\frac{3+4{,}9}{2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{1{,}2}{2}\,;\frac{7{,}9}{2}\Big) = (0{,}6\,;3{,}95)$$

---

**Exercice 12**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les points :

$A(-2\,;3)$ ; $B(4\,;5)$ ; $D(-1\,;0)$

1. a. Déterminer les coordonnées de l'unique point $C$ du plan afin que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

   b. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

2. On considère les points : $E(2\,;1)$ ; $F(0\,;7)$

   a. Démontrer que le quadrilatère $AEBF$ est un parallélogramme.

   b. Démontrer que le parallélogramme $AEBF$ est un losange.

   c. Démontrer que le losange $AEBF$ est un carré.

**Correction 12**

1. a. Déterminons les coordonnées du point $K$ milieu du segment $[BD]$ :

$$K\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big) = \Big(\frac{4+(-1)}{2}\,;\frac{5+0}{2}\Big) = \Big(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\Big)$$

Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme ses diagonales se coupe en leurs milieux : le point $K$ est également le milieu du segment $[AC]$.

Ainsi, les coordonnées du point $C$ vérifieent l'égalité suivantes :

$$K\Big(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\Big) = \Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big) = \Big(\frac{-2+x_C}{2}\,;\frac{4+y_C}{2}\Big)$$

En identifiant les abscisses et les ordonnées de ces deux coordonnées, on obtient les deux égalités suivantes :

$$\begin{array}{r|r} \dfrac{-2+x_C}{2} = \dfrac{3}{2} & \dfrac{3+y_C}{2} = \dfrac{5}{2} \\ -2+x_C = 3 & 3+y_C = 5 \\ x_C = 5 & y_C = 2 \end{array}$$

Ainsi, le point $C$ a pour coordonnées : $C(5\,;2)$

   b. Déterminons les longueurs des deux diagonales du quadrilatère $ABCD$ :

- $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$
  $= \sqrt{\big[5-(-2)\big]^2+(2-3)^2} = \sqrt{7^2+(-1)^2}$
  $= \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

- $BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2}$
  $= \sqrt{(-1-4)^2+(0-5)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2}$
  $= \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

Ainsi, on a : $AC = BD$

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors ce parallélogramme est un rectangle.

$ABCD$ est un rectangle.

> Les longueurs $AC$ et $BD$ admettent pour expression simplifiée :
> $AC = \sqrt{50} = \sqrt{5^2\times 2} = 5\sqrt{2}$

2. a. Déterminer les milieux des segments $[AB]$ et $[EF]$ :

- Le point $M$ milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M\Big(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\Big) = \Big(\frac{4+(-2)}{2}\,;\frac{3+5}{2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{2}{2}\,;\frac{8}{2}\Big) = (1\,;4)$$

- Le point $N$ milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées :

$$N\Big(\frac{x_E+x_F}{2}\,;\frac{y_E+y_F}{2}\Big) = \Big(\frac{2+0}{2}\,;\frac{1+7}{2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{2}{2}\,;\frac{8}{2}\Big) = (1\,;4)$$

Les segments $[AB]$ et $[EF]$ ont même milieu.

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Le quadrilatère $AEBF$ est un parallélogramme.

   b. Déterminons la longueur de côtés consécutifs :

- $AE = \sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}$
  $= \sqrt{\big[2-(-2)\big]^2+(1-3)^2} = \sqrt{4^2+(-2)^2}$
  $= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

- $EB = \sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2}$
  $= \sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{2^2+4^2}$
  $= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

Les segments $[AE]$ et $[EB]$ ont même longueurs.

Si un parallélogramme a deux de ses côtés consécutifs de même longueur alors ce parallélogramme est un losange.

$AEBF$ est un losange.

> De même, on a les simplifications :
> $AE = EB = 2\sqrt{5}$

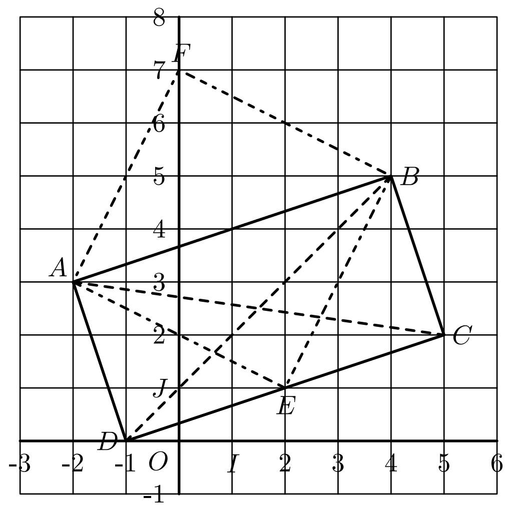
c. Déterminons les deux longueurs suivantes :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$= \sqrt{\left[4-(-2)\right]^2 + (5-3)^2} = \sqrt{6^2+2^2}$
$= \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$
- $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$
$= \sqrt{(0-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{(-2)^2+6^2}$
$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

On a la simplification :
$AB = EF = \sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10}$

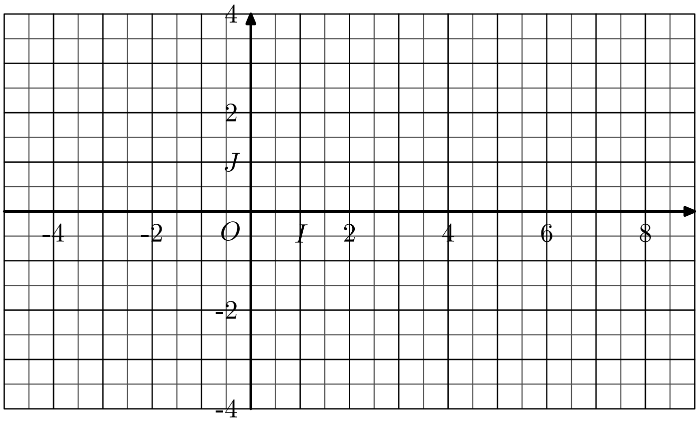
On a : $AB = EF$
Si un losange a ses diagonales de même longueur alors ce losange est un carré.

$AEBF$ est un carré.




## Exercice 13

On considère muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont la représentation est donnée ci-dessous :




On considère les trois points suivants :
$A(-4\,;3)$ ; $B(3\,;2)$ ; $C(1\,;-2)$

**Partie A**

1. Placer les points $A$, $B$, $C$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$.
2. a. Calculer $AB$.
   b. On admet que le calcul donne :
   $AC = \sqrt{50}$ ; $BC = \sqrt{20}$.
   Que peut-on en déduire pour le triangle $ABC$ ?
3. Soit $H$ le milieu du segment $[BC]$. Vérifier par le calcul que $H$ a pour coordonnées $(2\,;0)$.
4. Justifier que la droite $(AH)$ est une hauteur du triangle $ABC$.
5. a. Prouver que : $AH = \sqrt{45}$.
   b. Calculer l'aire du triangle $ABC$

**Partie B**

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Le point $D$ est l'image du point $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   a. Placer le point $D$.
   b. Montrer par le calcul que $D$ a pour coordonnées $(8\,;-3)$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$ ? Justifier.

## Correction 13

**Partie A**

2. a. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$= \sqrt{\big(3-(-4)\big)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2+1^2}$
$= \sqrt{50}$
On a aussi la simplification de longueur :
$AB = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
   b. Le triangle $ABC$ est isocèle en $A$ car :
   $AB = AC = \sqrt{50}$.
   Par contre, ce n'est pas un triangle rectangle puisque :
   $\sqrt{50}^2 \neq \sqrt{50}^2 + \sqrt{20}^2$
3. Les coordonnées de $H$ sont données par la formule :
$H\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\,;\dfrac{y_B+y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{3+1}{2}\,;\dfrac{2+(-2)}{2}\right) = (2\,;0)$
4. $[AH]$ est la médiane du triangle $ABC$ issue de $A$. Or le triangle est isocèle en $A$.
Dans un triangle isocèle, la médiane, la médiatrice, la bissectrice et la hauteur issues du sommet principal sont confondues.
$[AH]$ est aussi la hauteur du triangle $ABC$ issue de $A$.
5. a. Le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ et $H$ est le milieu du segment $[BC]$ : dans le triangle $ABC$, $[AH]$ est la médiane issue de $A$.
Dans un triangle isocèle, la hauteur, la médiane, la médiatrice et la bissectrice issue du sommet principal sont confondues.
$[AH]$ est la hauteur issue de $A$.
Le triangle $AHC$ est rectangle en $H$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AH^2 + CH^2 = AC^2$
L'application numérique nous donne :
$$AH^2 + \left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 = \sqrt{50}^2$$
$$AH^2 + \frac{20}{4} = 50$$
$$AH^2 = 50 - 5 = 45$$
$$AH = \sqrt{45}$$
*Remarque :* on a la simplification

$AH = \sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

b. $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AH\times BC}{2} = \dfrac{\sqrt{45}\times\sqrt{20}}{2} = \dfrac{\sqrt{45\times20}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{900}}{2} = \dfrac{\sqrt{30^2}}{2} = \dfrac{30}{2} = 15\,cm^2$

**Partie B**

1. $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A) = (1-(-4)\,;-2-3)$
$= (5\,;-5)$

2. b. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{BD}(x_D - x_B\,;y_D - y_B) = (x-3\,;y_D - 2)$
Le point $D$ étant l'image du point $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
De l'égalité précédente, on en déduit deux égalités respectivement sur les abscisses de ces deux vecteurs et également sur leur ordonnées :

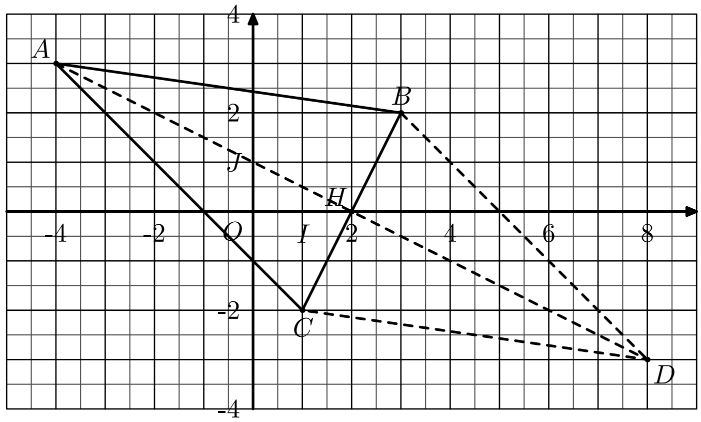
| | |
|---|---|
| $x_D - 3 = 5$ | $y_D - 2 = -5$ |
| $x_D = 5+3$ | $y_D = -5+2$ |
| $x_D = 8$ | $y_D = -3$ |

On en déduit que le point $D$ a pour coordonnées $D(8\,;-3)$.

3. Le point $D$ étant l'image du point $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, on en déduit l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$
De l'égalité précédente, on en déduit que le quadrilatère $ACDB$ est un parallélogramme.

De plus, le triangle $ABC$ est un triangle isocèle en $A$ *(d'après la question 2. b.)*. On en déduit l'égalité des longueurs :
$BA = AC$.

$ACDB$ est un parallélogramme et $BA = AC$.
Si un quadrilatère est un parallélogramme et si deux de ses côtés consécutifs sont de même longueur alors ce quadrilatère est un losange.
On en déduit que $ACDB$ est un losange.




## Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points suivants :

$A(-5\,;-4)\quad;\quad B(3\,;-2)\quad;\quad C\big(-\sqrt{3}-1\,;4\sqrt{3}-3\big)$

Démontrer que le triangle $ABC$ est équilatéral.

## Correction 14

Déterminons la mesure des trois côtés de ce triangle :

- $AB = \sqrt{\big(x_B - x_A\big)^2 + \big(y_B - y_A\big)^2}$
$= \sqrt{\big[3-(-5)\big]^2 + \big[(-2)-(-4)\big]^2}$
$= \sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{68}$

- $AC = \sqrt{\big(x_C - x_A\big)^2 + \big(y_C - y_A\big)^2}$
$= \sqrt{\big[-\sqrt{3}-1-(-5)\big]^2 + \big[4\sqrt{3}-3-(-4)\big]^2}$
$= \sqrt{\big(-\sqrt{3}+4\big)^2 + \big(4\sqrt{3}+1\big)^2}$
$= \sqrt{\big(3-8\sqrt{3}+16\big) + \big(48+8\sqrt{3}+1\big)}$
$= \sqrt{68}$

- $BC = \sqrt{\big(x_C - x_B\big)^2 + \big(y_C - y_B\big)^2}$
$= \sqrt{\big(-\sqrt{3}-1-3\big)^2 + \big[4\sqrt{3}-3-(-2)\big]^2}$
$= \sqrt{\big(-\sqrt{3}-4\big)^2 + \big(4\sqrt{3}-1\big)^2}$
$= \sqrt{\big(3+8\sqrt{3}+16\big) + \big(48-8\sqrt{3}+1\big)}$
$= \sqrt{68}$

Les trois mesures des côtés du triangle $ABC$ sont égales : $ABC$ est un triangle équilatéral.

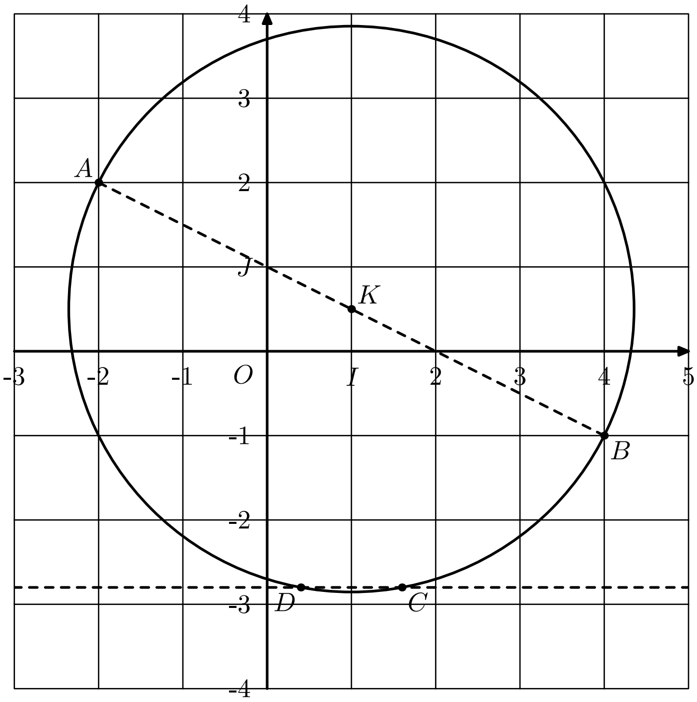
Les longueurs $AB$, $AC$ et $BC$ admettent une expression simplifiée :
$AB = \sqrt{68} = \sqrt{2^2\times17} = 2\sqrt{17}$

## Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points :

$A(-2\,;2)\quad;\quad B(4\,;-1)\quad;\quad K\Big(1\,;\dfrac{1}{2}\Big)$




On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

1. Justifier que le cercle $\mathscr{C}$ admet le point $K$ pour centre et dont le rayon a pour mesure $\dfrac{\sqrt{45}}{2}$.

2. On considère le point $C$ de coordonnées $\left(\dfrac{8}{5}\,;-\dfrac{14}{5}\right)$.

   a. Justifier que le point $C$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Donner la nature du triangle $ABC$. Justifier votre réponse.

3. La droite d'équation $y=-\dfrac{14}{5}$ intercepte le cercle $\mathscr{C}$ aux points $C$ et $D$.

   a. Justifier que le point $D$ vérifie l'équation :
   $$\left(x_D-1\right)^2=\frac{9}{25}$$

   b. En déduire les coordonnées du point $D$.

## Correction 15

1. Le centre $K$ du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu du diamètre $[AB]$ ; le point $K$ a pour coordonnées :
$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-2+4}{2}\,;\frac{2+(-1)}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{2}\,;\frac{1}{2}\right)=\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$$
Déterminons la mesure du segment $[AB]$ :
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{\left[4-(-2)\right]^2+(-1-2)^2}=\sqrt{6^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$$
Ainsi, le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon $\dfrac{\sqrt{45}}{2}$.

2. a. Déterminons la longueur du segment $[KC]$ :
$$KC=\sqrt{(x_C-x_K)^2+(y_C-y_K)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{8}{5}-1\right)^2+\left(-\frac{14}{5}-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{28}{10}-\frac{5}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\left(\frac{33}{10}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{1089}{100}}=\sqrt{\frac{36+1089}{100}}=\sqrt{\frac{1125}{100}}$$
$$=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{\sqrt{45}}{2}$$
$K$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ et $[KC]$ a la même mesure qu'un rayon de ce cercle, on en déduit que le point $K$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

On a la simplification de la longueur $KC$ :
$$KC=\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{\sqrt{3^2\times5}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

   b. $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ et $C$ est un point de ce cercle.
   Si un triangle est un inscrit dans un cercle et qu'un de ses côt́es forme un diamètre de cercle alors ce triangle est rectangle et ce côtés est son hypoténuse.
   $ABC$ est un triangle rectangle en $C$.

3. a. $D$ appartenant à la droite d'équation $y=-\dfrac{14}{5}$, on en déduit que le point $D$ a pour ordonnées $-\dfrac{14}{5}$ :
   Le point $D$ appartant au cercle $\mathscr{C}$, on a l'égalité :
$$KD=\frac{\sqrt{45}}{2}$$
$$\sqrt{(x_D-x_K)^2+(y_D-y_K)^2}=\frac{\sqrt{45}}{2}$$
$$(x_D-1)^2+\left(-\frac{14}{5}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{45}}{2}\right)^2$$
$$(x_D-1)^2+\left(-\frac{28}{10}-\frac{5}{10}\right)^2=\frac{45}{4}$$
$$(x_D-1)^2+\left(-\frac{33}{10}\right)^2=\frac{45}{4}$$
$$(x_D-1)^2+\frac{1089}{100}=\frac{1125}{100}$$
$$(x_D-1)^2=\frac{1125}{100}-\frac{1089}{100}$$
$$(x_D-1)^2=\frac{9}{25}$$

   b. L'équation précédente se traduit par les deux égalités suivantes :

| | |
|---|---|
| $x_D-1=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ | $x_D-1=\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ |
| $x_D-1=-\dfrac{3}{5}$ | $x_D-1=\dfrac{3}{5}$ |
| $x_D=-\dfrac{3}{5}+1$ | $x_D=\dfrac{3}{5}+1$ |
| $x_D=\dfrac{2}{5}$ | $x_D=\dfrac{8}{5}$ |

   On en déduit que le point $D$ a pour coordonnées :
$$D\left(\frac{2}{5}\,;-\frac{14}{5}\right)$$